La Matematica nel Mancala

Maurizio Paolini & Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore
paolini@dmf.unicatt.it, musesti@dmf.unicatt.it

Matematica e gioco

I matematici amano giocare...

Matematica e gioco

I matematici amano giocare...

... perché la matematica è un gioco (con le sue regole)

Matematica e gioco

I matematici amano giocare...

... perché la matematica è un gioco (con le sue regole)

- Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel della teoria degli insiemi

Matematica e gioco

I matematici amano giocare...

... perché la matematica è un gioco (con le sue regole)

- Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel della teoria degli insiemi
- Gli assiomi di Peano

Matematica e gioco

I matematici amano giocare...

... perché la matematica è un gioco (con le sue regole)

- Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel della teoria degli insiemi
- Gli assiomi di Peano
- Gli assiomi e postulati della geometria euclidea

Matematica e gioco

I matematici amano giocare...

... perché la matematica è un gioco (con le sue regole)

- Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel della teoria degli insiemi
- Gli assiomi di Peano
- Gli assiomi e postulati della geometria euclidea

... che si possono cambiare.

Matematica e gioco

I matematici amano giocare...

... perché la matematica è un gioco (con le sue regole)

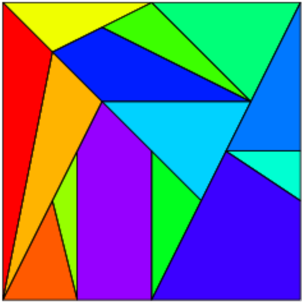
- Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel della teoria degli insiemi
- Gli assiomi di Peano
- Gli assiomi e postulati della geometria euclidea

... che si possono cambiare.

- Quinto postulato (delle parallele)
- Assioma di scelta
- ...

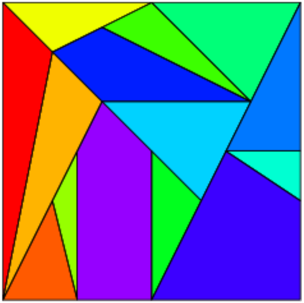
Matematici e gioco (1)

Archimede 287-212 a.C.:
Stomachion

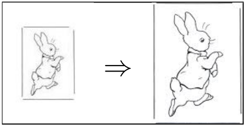


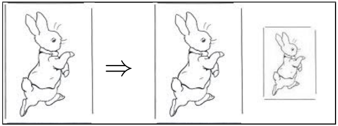
Matematici e gioco (1)

Archimede 287-212 a.C.:
Stomachion

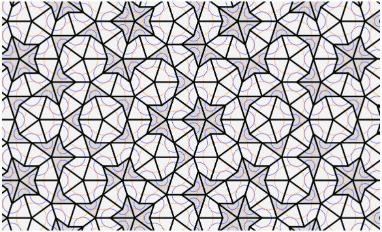


Fibonacci (1170-1240) con i suoi conigli



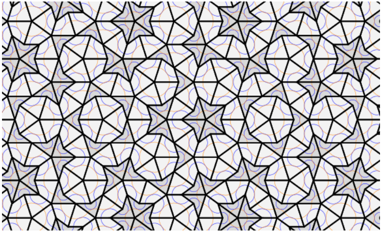


Matematici e gioco (2)



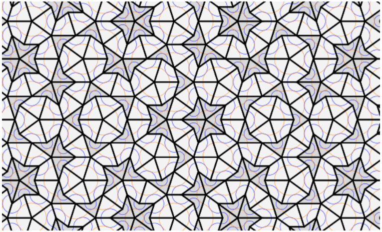
R. Penrose (1931-): tassellazioni aperiodiche

Matematici e gioco (2)



R. Penrose (1931-): tassellazioni aperiodiche
(Agevoliamo un contributo video pubblicitario)
http://frecceaquiloni.dmf.unicatt.it/

Matematici e gioco (2)



R. Penrose (1931-): tassellazioni aperiodiche
(Agevoliamo un contributo video pubblicitario)
`http://frecceaquiloni.dmf.unicatt.it/`

J.H. Conway (1937-): gioco “life”, numeri iperreali, calendario perpetuo, e molto altro

Matematici e gioco (3)

J.F. Nash (1928-): equilibrio di Nash in teoria dei giochi (premio Nobel per l'economia), HEX.

Matematici e gioco (3)

J.F. Nash (1928-): equilibrio di Nash in teoria dei giochi (premio Nobel per l'economia), HEX.

M. Gardner (1914-2010): divulgatore scientifico, "mathematical games" in Scientific American. Solitario bulgaro.

Le applicazioni della matematica

Sindaco di Cesenatico (laurea in fisica): "dico ai ragazzi che mi chiedono quali sono le applicazioni della matematica: non pensate alle applicazioni (che ci saranno sicuramente), ma alla soddisfazione di aver risolto un problema".

Le applicazioni della matematica

Sindaco di Cesenatico (laurea in fisica): "dico ai ragazzi che mi chiedono quali sono le applicazioni della matematica: non pensate alle applicazioni (che ci saranno sicuramente), ma alla soddisfazione di aver risolto un problema".

G.H. Hardy (1877-1947) (apologia di un matematico): La matematica vera è formata da quelle discipline che non vengono studiate per le loro applicazioni ma per il loro interesse intrinseco, come la teoria dei numeri (disciplina prediletta di Hardy).

Le applicazioni della matematica

Sindaco di Cesenatico (laurea in fisica): "dico ai ragazzi che mi chiedono quali sono le applicazioni della matematica: non pensate alle applicazioni (che ci saranno sicuramente), ma alla soddisfazione di aver risolto un problema".

G.H. Hardy (1877-1947) (apologia di un matematico): La matematica vera è formata da quelle discipline che non vengono studiate per le loro applicazioni ma per il loro interesse intrinseco, come la teoria dei numeri (disciplina prediletta di Hardy).

Smentito clamorosamente dalle applicazioni importantissime della teoria dei numeri nella crittografia...

Teorema di Zermelo

Teorema di Zermelo

Vale una e una sola delle seguenti affermazioni:

I matematici e gli scacchi

Teorema di Zermelo

Vale una e una sola delle seguenti affermazioni:

1. Il bianco vince sempre (se è abbastanza bravo);

I matematici e gli scacchi

Teorema di Zermelo

Vale una e una sola delle seguenti affermazioni:

1. Il bianco vince sempre (se è abbastanza bravo);
2. Il nero vince sempre (se è abbastanza bravo);

Teorema di Zermelo

Vale una e una sola delle seguenti affermazioni:

1. Il bianco vince sempre (se è abbastanza bravo);
2. Il nero vince sempre (se è abbastanza bravo);
3. Ciascuno dei due giocatori può forzare la patta.

I matematici e gli scacchi

Teorema di Zermelo

Vale una e una sola delle seguenti affermazioni:

1. Il bianco vince sempre (se è abbastanza bravo);
2. Il nero vince sempre (se è abbastanza bravo);
3. Ciascuno dei due giocatori può forzare la patta.

Vabbè... che ci volete fare... tipico teorema da matematici.

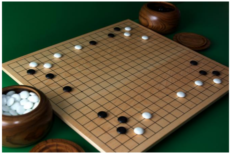
I matematici e gli scacchi

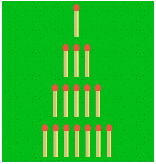
Teorema di Zermelo

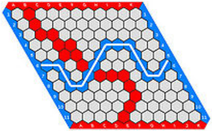
Vale una e una sola delle seguenti affermazioni:

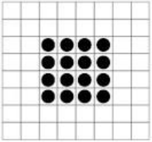
1. Il bianco vince sempre (se è abbastanza bravo);
2. Il nero vince sempre (se è abbastanza bravo);
3. Ciascuno dei due giocatori può forzare la patta.

Vabbè... che ci volete fare... tipico teorema da matematici.
In verità il Teorema di Zermelo vale per tutta una classe di giochi, tra cui:
Dama, Tria, Go, Nim, Hex, Chomp, TacTix









La strategia vincente per il NIM

Come si gioca?

- Ci sono alcuni mucchi di sassi (o file di stuzzicadenti);
- a turno ciascun giocatore sceglie un mucchio e toglie uno o più sassi;
- vince chi toglie l'ultimo sasso;
- variante: perde chi toglie l'ultimo sasso.

Esempio: Marienbad. Si parte con 4 file di 1, 3, 5, 7 stuzzicadenti.
Strategia:

La strategia vincente per il NIM

Come si gioca?

- Ci sono alcuni mucchi di sassi (o file di stuzzicadenti);
- a turno ciascun giocatore sceglie un mucchio e toglie uno o più sassi;
- vince chi toglie l'ultimo sasso;
- variante: perde chi toglie l'ultimo sasso.

Esempio: Marienbad. Si parte con 4 file di 1, 3, 5, 7 stuzzicadenti.
Strategia: si calcola $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots$ (somma NIM)

Teorema

- Se la somma NIM non è zero, allora esiste una mossa che la fa diventare zero.
- Se la somma NIM è zero, allora qualunque mossa la rende non nulla.

La somma NIM

La somma NIM $a \oplus b$ si calcola scrivendo i numeri a e b in base 2, poi si calcola la somma in colonna, ma **senza i riporti!**

La somma NIM

La somma NIM $a \oplus b$ si calcola scrivendo i numeri a e b in base 2, poi si calcola la somma in colonna, ma **senza i riporti!**
Esempio:

$$10 \oplus 3 = (1010)_2 \oplus (11)_2 = (1001)_2 = 9$$

La somma NIM

La somma NIM $a \oplus b$ si calcola scrivendo i numeri a e b in base 2, poi si calcola la somma in colonna, ma **senza i riporti!**
Esempio:

$$10 \oplus 3 = (1010)_2 \oplus (11)_2 = (1001)_2 = 9$$

La posizione iniziale di Marienbad ha somma NIM:

$$1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 = (1)_2 \oplus (11)_2 \oplus (101)_2 \oplus (111)_2 = 0$$

quindi è una posizione perdente! Se ad esempio il primo giocatore togliesse 2 sassi dal terzo mucchio, ottenendo la posizione $1, 3, 3, 7$, la somma NIM diventerebbe $(110)_2$ e diventerebbe zero togliendo 6 sassi dall'ultimo mucchio, configurazione $1, 3, 3, 1$.

Risultati non costruttivi (da matematici)

Per alcuni giochi, ad esempio Chomp e Hex (per Hex il risultato è di Nash)

Risultati non costruttivi (da matematici)

Per alcuni giochi, ad esempio Chomp e Hex (per Hex il risultato è di Nash)

1. si sa che il primo giocatore ha una strategia vincente...

Risultati non costruttivi (da matematici)

Per alcuni giochi, ad esempio Chomp e Hex (per Hex il risultato è di Nash)

1. si sa che il primo giocatore ha una strategia vincente...
2. ma non si sa qual è!

Il solitario bulgaro

È un gioco "a zero giocatori". Ovvero il giocatore non deve prendere nessuna decisione, ma solo applicare le regole.

Un altro famoso esempio di questo tipo è il gioco VITA (Life) di Conway.

Il solitario bulgaro

È un gioco "a zero giocatori". Ovvero il giocatore non deve prendere nessuna decisione, ma solo applicare le regole.

Un altro famoso esempio di questo tipo è il gioco VITA (Life) di Conway.

Le regole

1. Situazione iniziale: alcuni mucchi di sassi
2. si prende un sasso da ciascun mucchio e con questi si forma un nuovo mucchio

Il solitario bulgaro

È un gioco "a zero giocatori". Ovvero il giocatore non deve prendere nessuna decisione, ma solo applicare le regole.
Un altro famoso esempio di questo tipo è il gioco VITA (Life) di Conway.

Le regole

1. Situazione iniziale: alcuni mucchi di sassi
2. si prende un sasso da ciascun mucchio e con questi si forma un nuovo mucchio

- Il numero totale di sassi rimane sempre lo stesso;
- un mucchio formato da un solo sasso scompare alla mossa successiva.

Domanda: Cosa succede dopo TANTE mosse?
Esempio: $5, 3, 2 \to 4, 2, 1, 3 \to 3, 1, 2, 4 \to 2, 1, 3, 4 \to \ldots$

Il solitario bulgaro

È un gioco "a zero giocatori". Ovvero il giocatore non deve prendere nessuna decisione, ma solo applicare le regole.
Un altro famoso esempio di questo tipo è il gioco VITA (Life) di Conway.

Le regole

1. Situazione iniziale: alcuni mucchi di sassi
2. si prende un sasso da ciascun mucchio e con questi si forma un nuovo mucchio

- Il numero totale di sassi rimane sempre lo stesso;
- un mucchio formato da un solo sasso scompare alla mossa successiva.

Domanda: Cosa succede dopo TANTE mosse?
Esempio: $5, 3, 2 \to 4, 2, 1, 3 \to 3, 1, 2, 4 \to 2, 1, 3, 4 \to \ldots$
Problema: 4950 sassi in 3 mucchi con $2000, 2000, 950$ sassi. Quanti mucchi ci saranno dopo un miliardo di mosse?

Il solitario bulgaro

È un gioco "a zero giocatori". Ovvero il giocatore non deve prendere nessuna decisione, ma solo applicare le regole.
Un altro famoso esempio di questo tipo è il gioco VITA (Life) di Conway.

Le regole

1. Situazione iniziale: alcuni mucchi di sassi
2. si prende un sasso da ciascun mucchio e con questi si forma un nuovo mucchio

- Il numero totale di sassi rimane sempre lo stesso;
- un mucchio formato da un solo sasso scompare alla mossa successiva.

Domanda: Cosa succede dopo TANTE mosse?
Esempio: $5, 3, 2 \rightarrow 4, 2, 1, 3 \rightarrow 3, 1, 2, 4 \rightarrow 2, 1, 3, 4 \rightarrow \ldots$
Problema: 4950 sassi in 3 mucchi con $2000, 2000, 950$ sassi. Quanti mucchi ci saranno dopo un miliardo di mosse?
Isomorfo al mancala aperto con configurazione iniziale monotòna.

IL MANCALA

Mancala tradizionali africani I

1. Alemungula (Etiopia), 2x5, 50
2. Andada (Eritrea), da 2x12 a 2x24, 2 per buca
3. Anywoli (Etiopia e Sudan), 2x12, 96
4. Aweet (Sudan) 4x10, 64
5. Ayoayo (Nigeria), 2x6, 48
6. Ba-awa (Ghana) 2x6, 48 sinonimi: Jrin-jrin, Nam-nam, Round-and-round
7. Bao (Tanzania, Malawi) 4x8, 64 sinonimi: Bawo
8. Bao Kiarabu (Zanzibar) 4x8, 64
9. Coro (Uganda) 4x8, 64
10. El Arnab (Sudan) 2x3 con granai, 10
11. Endodoi (Tanzania, Kenya), 2xN, M
12. En gehé (Tanzania), 2x40-50, 320-400

Mancala tradizionali africani II

13. Enkeshui (Tanzania, Kenya) 2x8, 2x10 o 2x12, 48
14. Giuthi (Kenya) 2x8, 96
15. Hus (Namibia) 4x8, 48
16. Igisoro (Ruanda) 4x8, 64
17. Isolo (Tanzania) 4x8, 64 sinonimi: Isumbi
18. Katro (Madagascar), 6x6, 72
19. Kiela (Angola), 10x4, 56
20. Kiothi (Kenya), 2x10, 60
21. Kisolo (Congo RD, Zimbabwe) 4x7, 36 sinonimi: Chisolo
22. Krur (Nigeria, Mauritania, Marocco, Algeria, Senegal, Mali, Niger) 2x4, 32
23. Kombe (Kenya) 4x8, 64
24. Lamlameta (Etiopia), 2x12, 24
25. Latho (Etiopia), 2x6, 30

Mancala tradizionali africani III

26. Layli Goobalay (Somaliland) 2x6, 48
27. Lukho (Kenya), 2x8, 48
28. Mbelele (Congo RD)
29. Mbothe (Kenya) 2x10, 40
30. Mefuvha (Sudafrica) 4xN, M
31. Moruba (Sudafrica) 4xN, M
32. Mongale (Kenya) 4x8, 68
33. Mongola (Congo RD) 4x7, 56
34. Nsa Isong (Nigeria) 2x6
35. Omweso (Uganda) 4x8, 64 sinonimi: Mweso
36. Oware Grand Slam (v. Wari) 2x6, 48
37. Tampoduo (Ghana) 2x6, 48 sinonimi: Ayo J'odu
38. Tschuba (Sudafrica, Mozambico), 2x11, 62
39. Um el Bagara (Sudan), 2x5, 50 sinonimi: Mangala
40. Wari (quasi ovunque in Africa occidentale, Caraibi) 2x6, 48
    sinonimi: Awale, Awari, Awele, Ouri, Oware, Warri

Mancala tradizionali asiatici

1. Ali Guli Mane, 2x7, 70
2. Aw-li On-nam Ot-tjin, 2x9, 54 sinonimi: Otjin
3. Congklak 2x7 con granai, 98 sinonimi: Dacon, Congkak
4. Daramutu 2x7, 56
5. Hawalis 4x7, 56
6. Mangala 2x6 o 2x7, 60 o 70
7. Sungka 2x7 con granai, 84
8. Tchuca ruma, 1x5, 8 (o 24)
9. Unee tugaluulax 2x3, 36

Mancala tradizionali americani ed europei

Americani:

1. Adji-boto, 2x5 con granai, 100
2. Hoyito 2x6, 48   sinonimi: El Hoyito, Casitas, Mate
3. Wari 2x6, 48

Europei:

1. Bohnenspiel 2x6, 72

Mancala moderni

1. 55Stones, 1x11, 55
2. Chuba, 2x11, 62
3. Cross-Kalah 2x6 con granai, 36-72
4. Cross-Wari 2x6 con granai, 36-72
5. Glass Bead Game, 2x5, due serie da 5 numerate da 1 a 5, 10 indifferenziate
6. Kalah 2x6 con granai, 36-72   sinonimi: Bantumi, Kalaha
7. Mancala di Eppstein, 1xN, M (N e M sono due numeri qualsiasi)
8. Space Walk 2x6 con granai, 6+6+6

Esempio: il Wari

Regole del Wari

Ci sono 12 buche disposte su due file: 6 buche "appartengono" a un giocatore e le altre 6 "appartengono" all'altro giocatore.

Regole del Wari

Ci sono 12 buche disposte su due file: 6 buche "appartengono" a un giocatore e le altre 6 "appartengono" all'altro giocatore.

All'inizio del gioco, 4 semi vengono posizionati in ciascuna delle case. Il primo turno spetta solitamente a chi ha vinto la partita precedente.

Regole del Wari

Ci sono 12 buche disposte su due file: 6 buche “appartengono” a un giocatore e le altre 6 “appartengono” all’altro giocatore.

All’inizio del gioco, 4 semi vengono posizionati in ciascuna delle case. Il primo turno spetta solitamente a chi ha vinto la partita precedente.

Scopo del gioco è catturare più semi dell’avversario (i semi sono in tutto 48)

Regole del Wari

Ci sono 12 buche disposte su due file: 6 buche “appartengono” a un giocatore e le altre 6 “appartengono” all’altro giocatore.

All’inizio del gioco, 4 semi vengono posizionati in ciascuna delle case. Il primo turno spetta solitamente a chi ha vinto la partita precedente.

Scopo del gioco è catturare più semi dell’avversario (i semi sono in tutto 48)

Come in tutti i mancala, la mossa nel Wari consiste in una semina. Al proprio turno, il giocatore sceglie una delle sue case, ne estrae tutti i semi, e li distribuisce nelle case adiacenti, uno per casa, descrivendo un percorso antiorario.

Regole del Wari

Ci sono 12 buche disposte su due file: 6 buche “appartengono” a un giocatore e le altre 6 “appartengono” all’altro giocatore.

All’inizio del gioco, 4 semi vengono posizionati in ciascuna delle case. Il primo turno spetta solitamente a chi ha vinto la partita precedente.

Scopo del gioco è catturare più semi dell’avversario (i semi sono in tutto 48)

Come in tutti i mancala, la mossa nel Wari consiste in una semina. Al proprio turno, il giocatore sceglie una delle sue case, ne estrae tutti i semi, e li distribuisce nelle case adiacenti, uno per casa, descrivendo un percorso antiorario.

Non viene deposto alcun seme nella casa da cui i semi sono stati prevelati. Anche se la semina, descrivendo un giro completo del tabellone, dovesse raggiungere la casa di partenza, quest’ultima verrà saltata.

Regole del Wari II

Al termine della semina, se l'ultimo seme è stato deposto in una casa dell'avversario, e il totale dei semi presenti in quella casa dopo la semina ammonta a 2 o 3, tutti i semi nella casa vengono catturati. In questo caso, inoltre, si procede anche a verificare se il penultimo seme è stato deposto in una casa avversaria portando il numero di pezzi totali a 2 o 3, e, in caso positivo, anche quei pezzi sono catturati; e così via a ritroso.

Regole del Wari II

Al termine della semina, se l'ultimo seme è stato deposto in una casa dell'avversario, e il totale dei semi presenti in quella casa dopo la semina ammonta a 2 o 3, tutti i semi nella casa vengono catturati. In questo caso, inoltre, si procede anche a verificare se il penultimo seme è stato deposto in una casa avversaria portando il numero di pezzi totali a 2 o 3, e, in caso positivo, anche quei pezzi sono catturati; e così via a ritroso.

Se si verifica una situazione di stallo (ovvero si entra in un circolo infinito di mosse ripetute), i semi restanti vengono divisi in parti uguali fra i giocatori; se sono dispari, il seme in eccesso viene dato al giocatore in vantaggio.

Le regole del mancala

Contributo video... 

Le regole del mancala

Contributo video... 

Colpo di scena!

Il gioco del "facciamo" (Stefano Benni)

Le regole del mancala

Contributo video... 

Colpo di scena!

Il gioco del "facciamo" (Stefano Benni)

Cambiamo le regole del gioco:

Le regole del mancala

Contributo video...
Colpo di scena!

Il gioco del "facciamo" (Stefano Benni)

Cambiamo le regole del gioco:

- Un solo giocatore (anzi, zero giocatori)

Le regole del mancala

Contributo video... 

Colpo di scena!

Il gioco del "facciamo" (Stefano Benni)

Cambiamo le regole del gioco:

- Un solo giocatore (anzi, zero giocatori)
- Infinite "buche"

Le regole del mancala

Contributo video... 

Colpo di scena!

Il gioco del "facciamo" (Stefano Benni)

Cambiamo le regole del gioco:

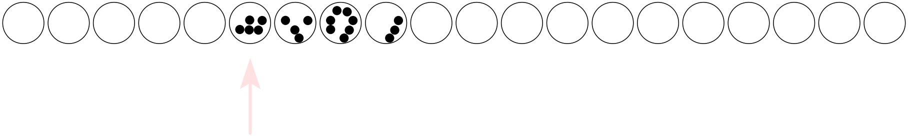
- Un solo giocatore (anzi, zero giocatori)
- Infinite "buche"
- Si sceglie il mucchio più a sinistra

Mancala aperto

È un gioco senza giocatori!
Si immagina di avere una fila **infinita** di buche e un numero finito di semi posti in buche **consecutive**.

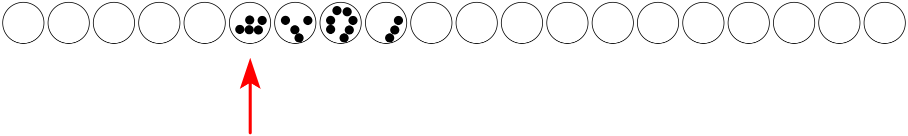
Mancala aperto

È un gioco senza giocatori!
Si immagina di avere una fila **infinita** di buche e un numero finito di semi posti in buche **consecutive**.



Mancala aperto

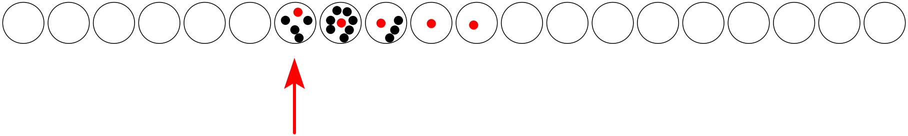
È un gioco senza giocatori!
Si immagina di avere una fila **infinita** di buche e un numero finito di semi posti in buche **consecutive**.



La **mossa** consiste nel prendere tutti i semi nella buca più a sinistra e seminarli verso destra, uno per buca.

Mancala aperto

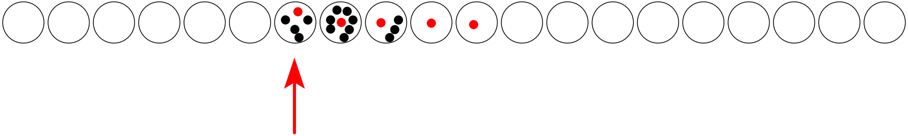
È un gioco senza giocatori!
Si immagina di avere una fila **infinita** di buche e un numero finito di semi posti in buche **consecutive**.



La **mossa** consiste nel prendere tutti i semi nella buca più a sinistra e seminarli verso destra, uno per buca.

Mancala aperto

È un gioco senza giocatori!
Si immagina di avere una fila **infinita** di buche e un numero finito di semi posti in buche **consecutive**.

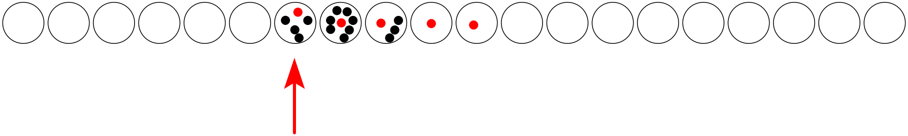


La **mossa** consiste nel prendere tutti i semi nella buca più a sinistra e seminarli verso destra, uno per buca.

Poi si continua a ripetere l'operazione...

Mancala aperto

È un gioco senza giocatori!
Si immagina di avere una fila **infinita** di buche e un numero finito di semi posti in buche **consecutive**.



La **mossa** consiste nel prendere tutti i semi nella buca più a sinistra e seminarli verso destra, uno per buca.

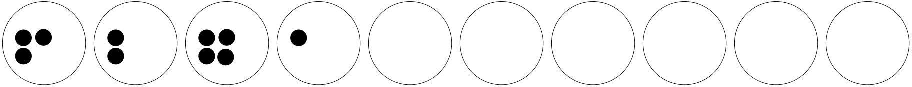
Poi si continua a ripetere l'operazione...
La domanda (del buon matematico) è:

Cosa succede dopo un po' di mosse? Dove si arriverà?

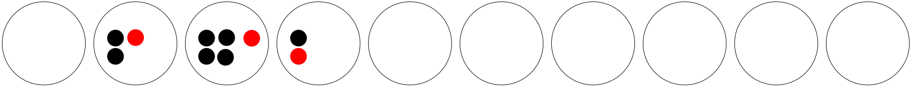
Mosse del mancala

Salta animazione

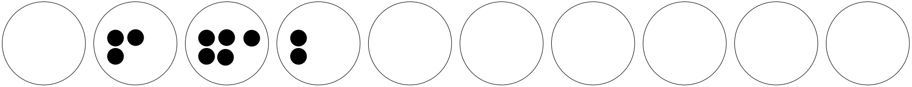
Mosse nel Mancala aperto



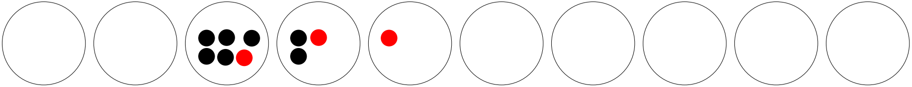
Mosse nel Mancala aperto



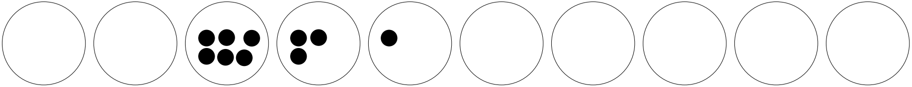
Mosse nel Mancala aperto



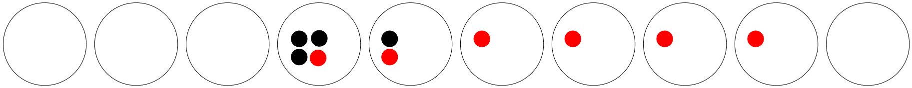
Mosse nel Mancala aperto



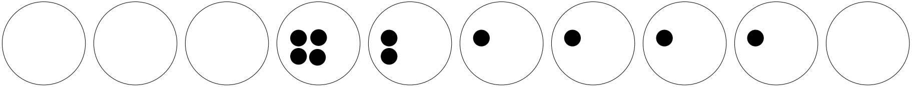
Mosse nel Mancala aperto



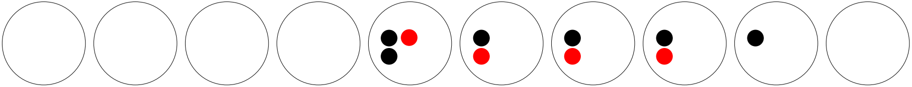
Mosse nel Mancala aperto



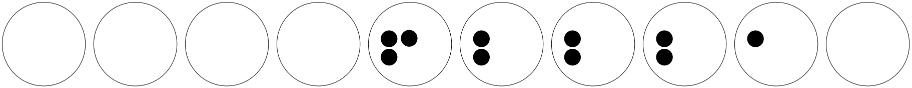
Mosse nel Mancala aperto



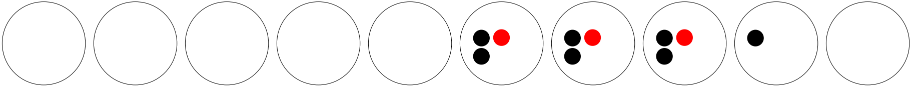
Mosse nel Mancala aperto



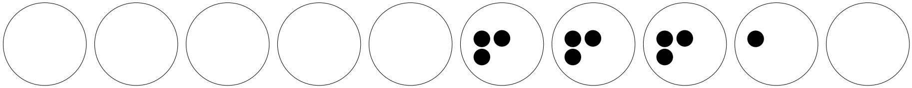
Mosse nel Mancala aperto



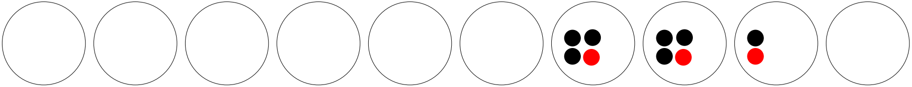
Mosse nel Mancala aperto



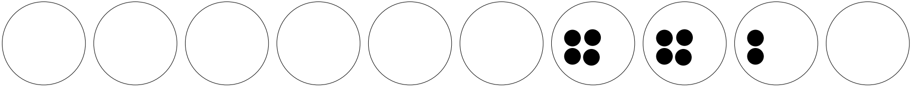
Mosse nel Mancala aperto



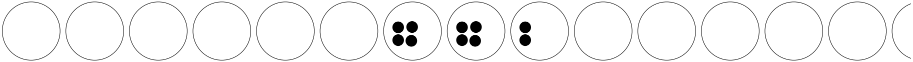
Mosse nel Mancala aperto



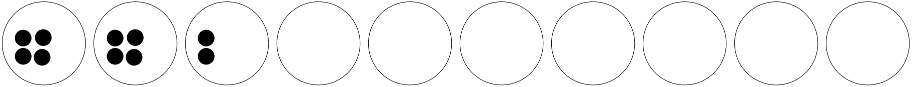
Mosse nel Mancala aperto



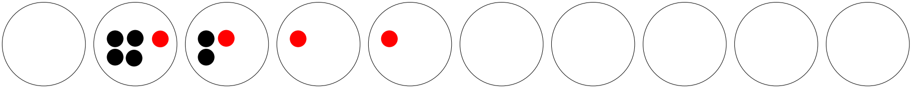
Mosse nel Mancala aperto



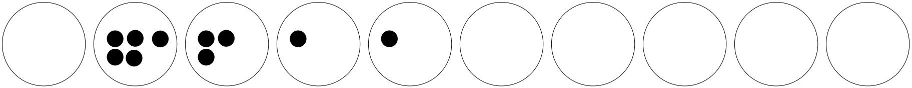
Mosse nel Mancala aperto



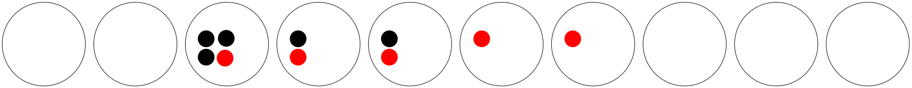
Mosse nel Mancala aperto



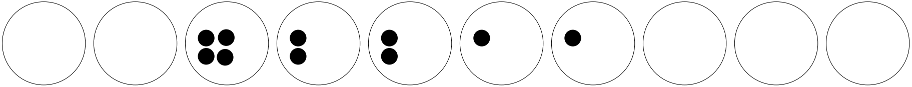
Mosse nel Mancala aperto



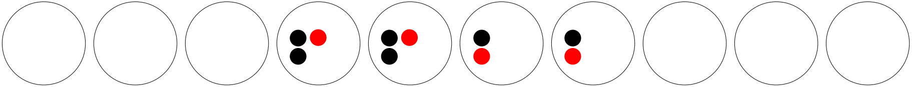
Mosse nel Mancala aperto



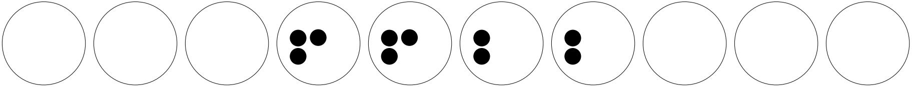
Mosse nel Mancala aperto



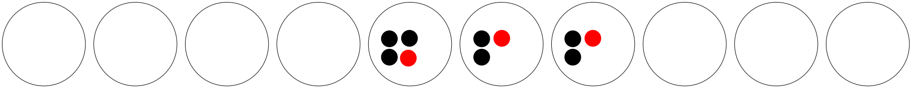
Mosse nel Mancala aperto



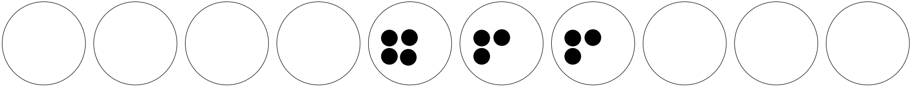
Mosse nel Mancala aperto



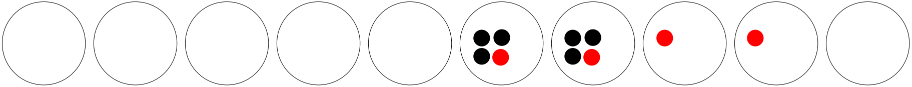
Mosse nel Mancala aperto



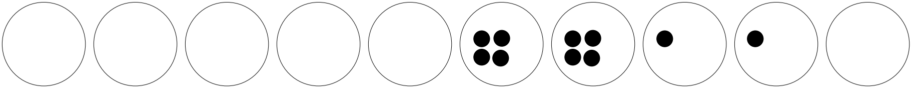
Mosse nel Mancala aperto



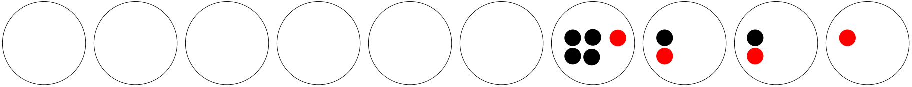
Mosse nel Mancala aperto



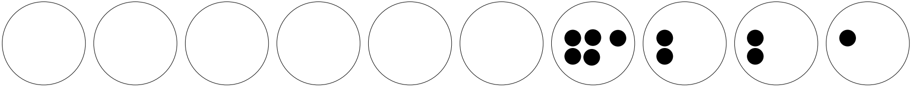
Mosse nel Mancala aperto



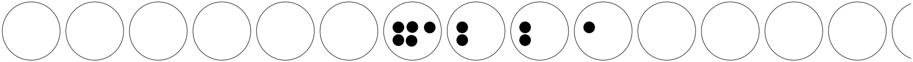
Mosse nel Mancala aperto



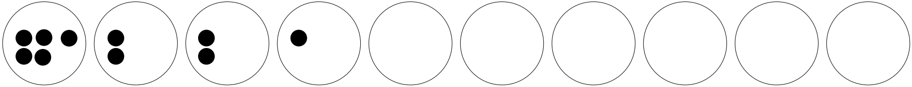
Mosse nel Mancala aperto



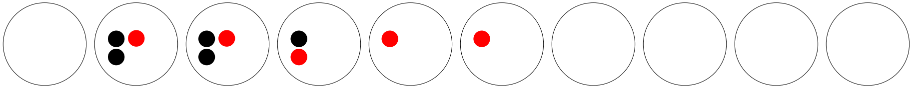
Mosse nel Mancala aperto



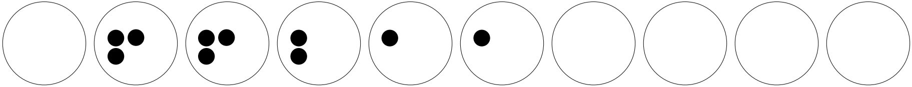
Mosse nel Mancala aperto



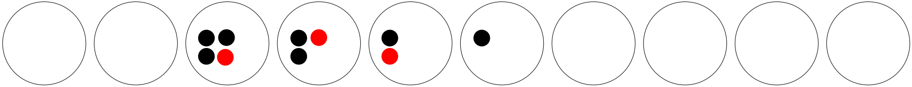
Mosse nel Mancala aperto



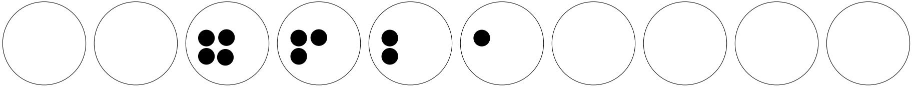
Mosse nel Mancala aperto



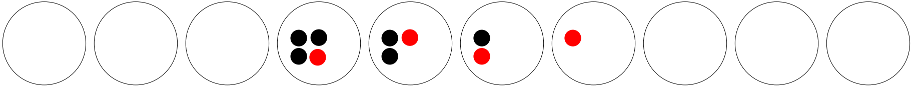
Mosse nel Mancala aperto



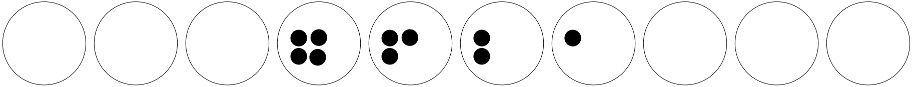
Mosse nel Mancala aperto



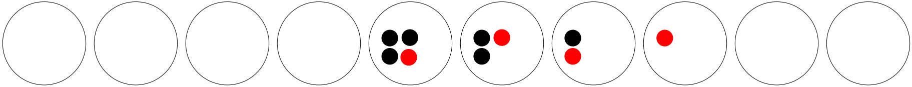
Mosse nel Mancala aperto



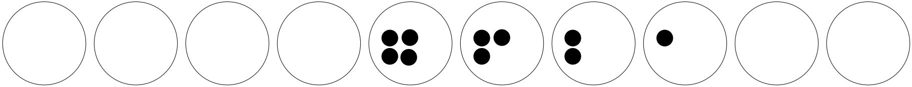
Mosse nel Mancala aperto



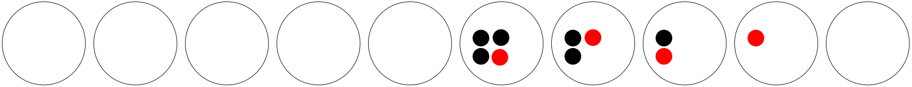
Mosse nel Mancala aperto



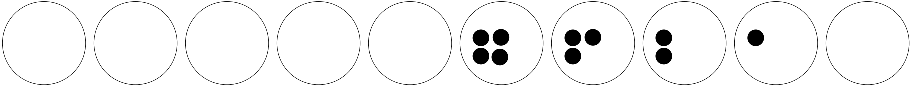
Mosse nel Mancala aperto



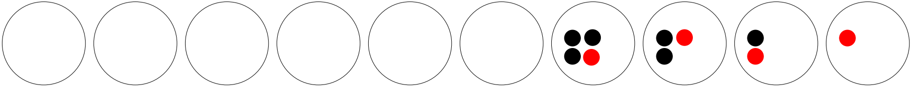
Mosse nel Mancala aperto



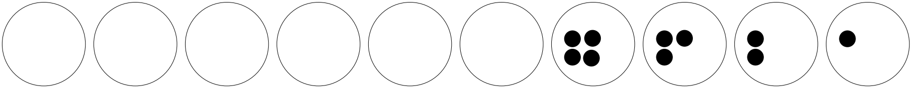
Mosse nel Mancala aperto



Mosse nel Mancala aperto



Mosse nel Mancala aperto



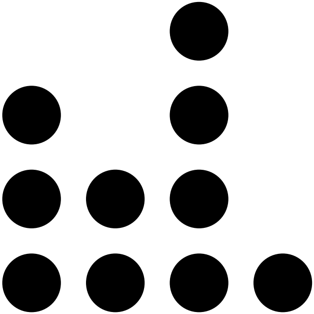
Fine Mosse del Mancala

Torna indietro

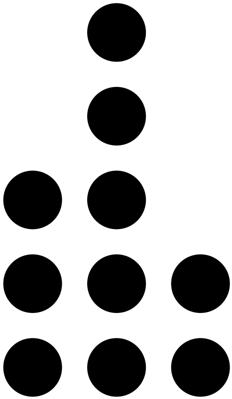
Animazione 3 2 4 1

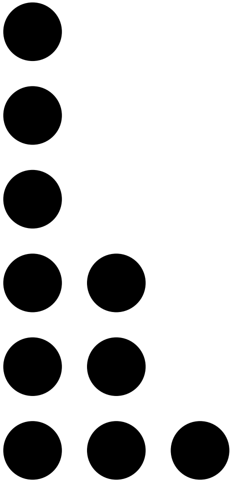
▸ Salta animazione

$\boxed{0}$



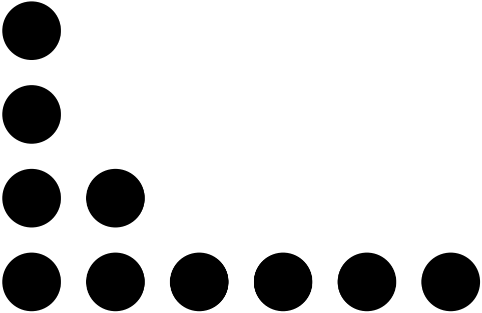
$\boxed{1}$



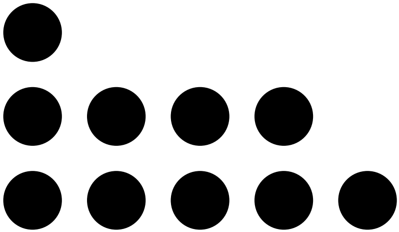


$\boxed{2}$

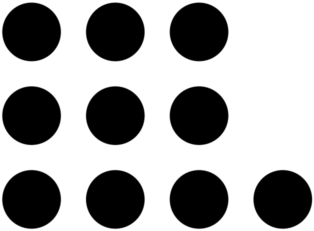
$\boxed{3}$



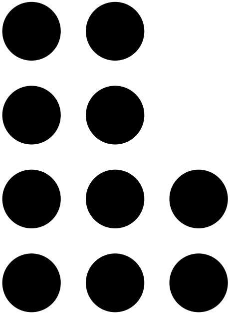
$\boxed{4}$



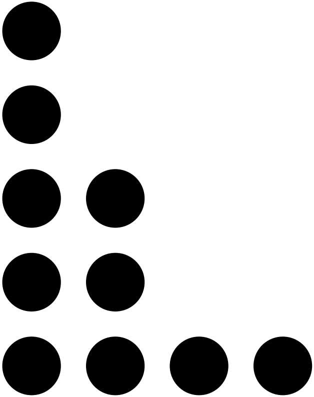
$\boxed{5}$



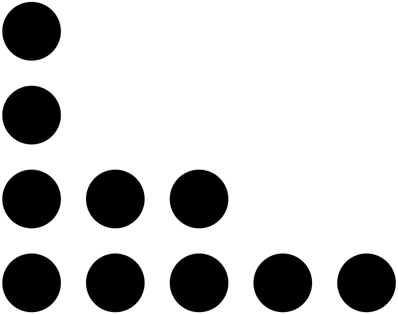
$\boxed{6}$



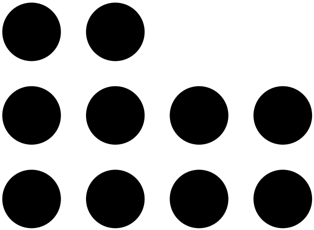
$\boxed{7}$



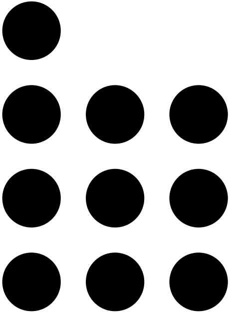
$\boxed{8}$



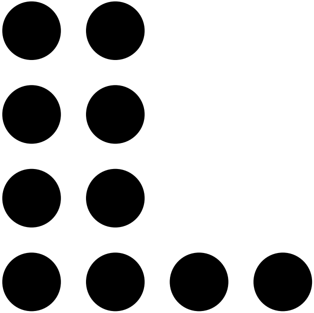
$\boxed{9}$



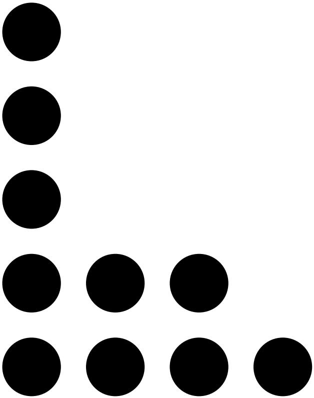
$\boxed{10}$



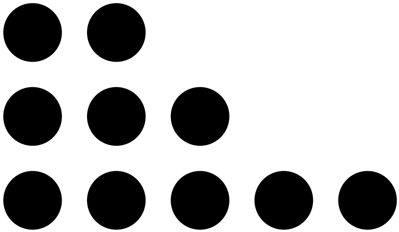
11



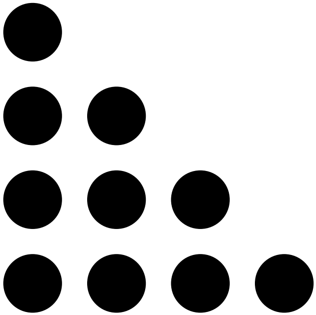
$\boxed{12}$



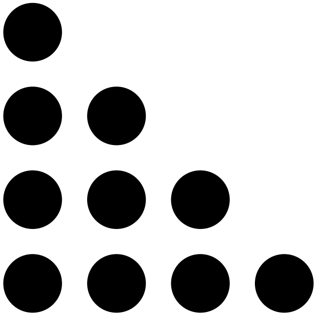
$\boxed{13}$



$\boxed{14}$



$\boxed{15}$



Fine animazione 3 2 4 1

Torna indietro

Periodicità

Si raggiunge la periodicità? Perché?
E quali sono le configurazioni periodiche?

Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:

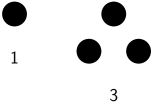
Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:

1

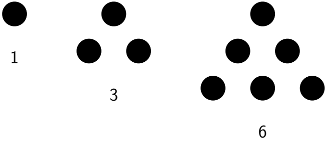
Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:



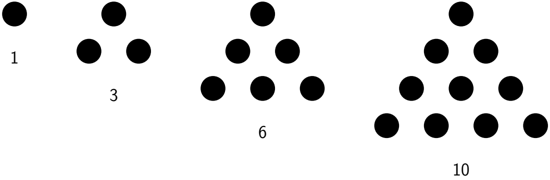
Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:



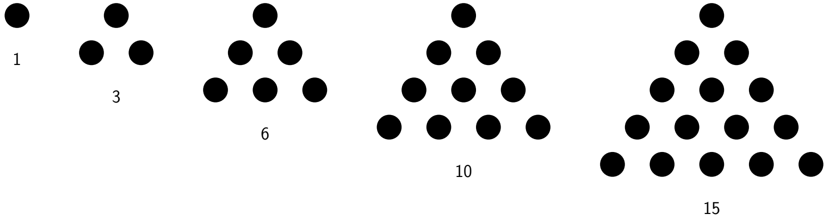
Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:



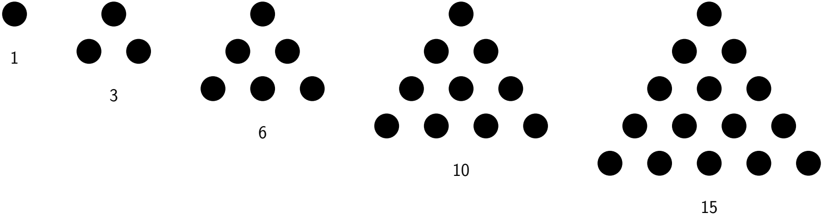
Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:



Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:

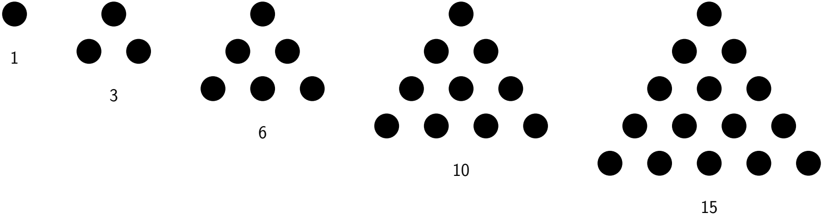


Dato il numero triangolare T_n, il successivo si costruisce aggiungendo una riga di $n + 1$ elementi, quindi

$$T_{n+1} = T_n + n + 1.$$

Numeri triangolari

Sono i numeri naturali che possono essere disposti a triangolo:



Dato il numero triangolare T_n, il successivo si costruisce aggiungendo una riga di $n+1$ elementi, quindi

$$T_{n+1} = T_n + n + 1.$$

Ecco un elenco dei primi numeri triangolari:
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91 105 120 136 153 171 190 210 ...

Configurazioni periodiche

Abbiamo già incontrato, nell'animazione precedente, una configurazione che non cambia:

`4 3 2 1`

Configurazioni periodiche

Abbiamo già incontrato, nell'animazione precedente, una configurazione che non cambia:

`4 3 2 1`

Come vedete, il numero di semi è triangolare (10, in questo caso), ed essi sono disposti in modo discendente.

Configurazioni periodiche

Abbiamo già incontrato, nell'animazione precedente, una configurazione che non cambia:

`4 3 2 1`

Come vedete, il numero di semi è triangolare (10, in questo caso), ed essi sono disposti in modo discendente.
Queste configurazioni si chiamano **gruppi di marcia** e non cambiano mai, quindi sono periodiche di periodo 1.

Configurazioni periodiche

Abbiamo già incontrato, nell'animazione precedente, una configurazione che non cambia:

`4 3 2 1`

Come vedete, il numero di semi è triangolare (10, in questo caso), ed essi sono disposti in modo discendente.
Queste configurazioni si chiamano **gruppi di marcia** e non cambiano mai, quindi sono periodiche di periodo 1.
Si può dimostrare (e cercheremo di spiegare come) che quando si parte da un numero di semi triangolare si raggiunge **sempre** il corrispondente gruppo di marcia.

Configurazioni periodiche

Abbiamo già incontrato, nell'animazione precedente, una configurazione che non cambia:

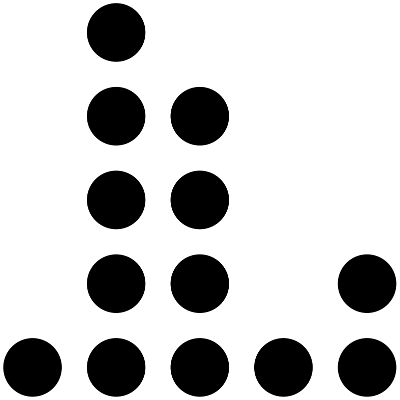
4 3 2 1

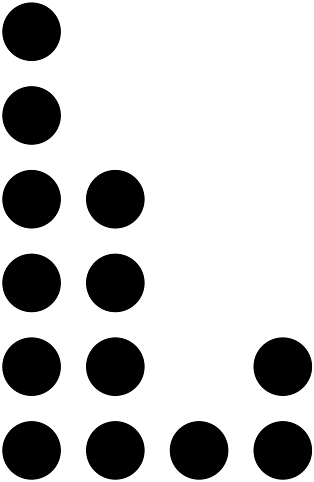
Come vedete, il numero di semi è triangolare (10, in questo caso), ed essi sono disposti in modo discendente.
Queste configurazioni si chiamano **gruppi di marcia** e non cambiano mai, quindi sono periodiche di periodo 1.
Si può dimostrare (e cercheremo di spiegare come) che quando si parte da un numero di semi triangolare si raggiunge **sempre** il corrispondente gruppo di marcia.
Ma cosa succede se il numero di semi iniziale non è triangolare? Vediamo un esempio con 13 semi.

Animazione 1 5 4 1 2

Salta animazione

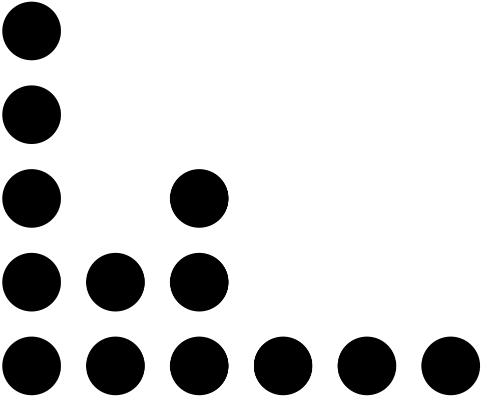
$\boxed{0}$



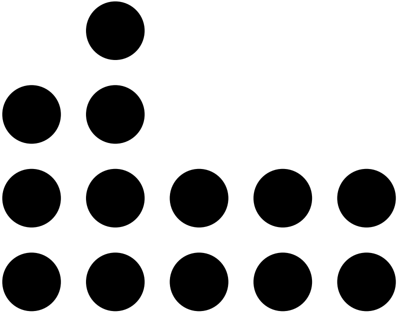


$\boxed{1}$

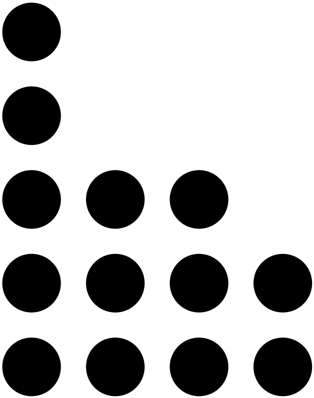
$\boxed{2}$



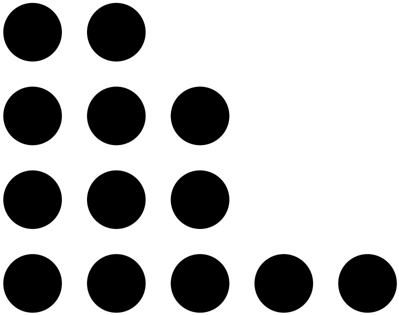
$\boxed{3}$



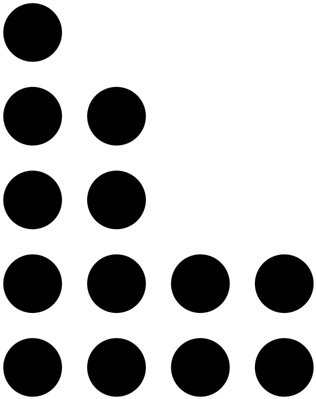
$\boxed{4}$



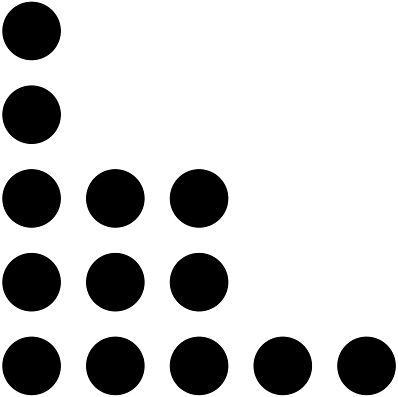
$\boxed{5}$



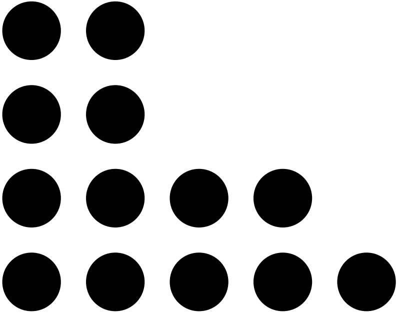
$\boxed{6}$



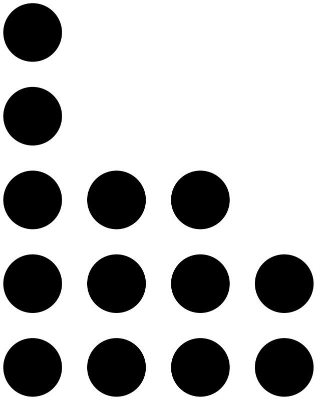
$\boxed{7}$



$\boxed{8}$



$\boxed{9}$



Fine animazione 1 5 4 1 2

Torna indietro

Abbiamo trovato una configurazione periodica:

Abbiamo trovato una configurazione periodica:

$$5 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 2$$

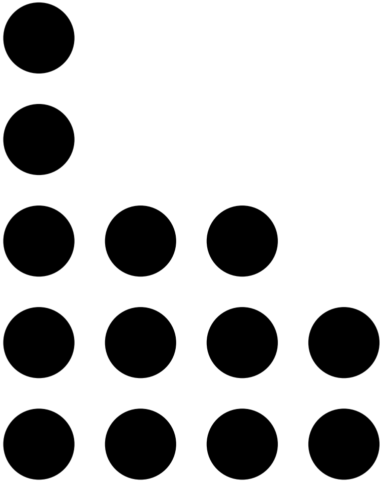
Abbiamo trovato una configurazione periodica:

$$5 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 2$$

Analizziamola meglio.

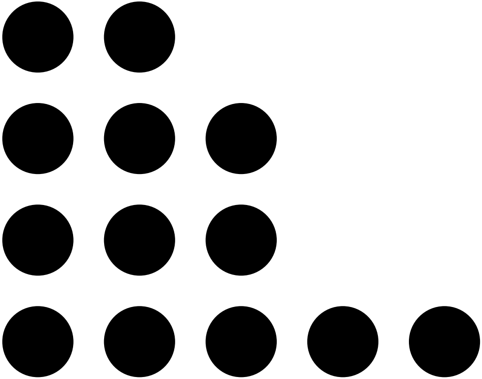
Animazione 5 3 3 2

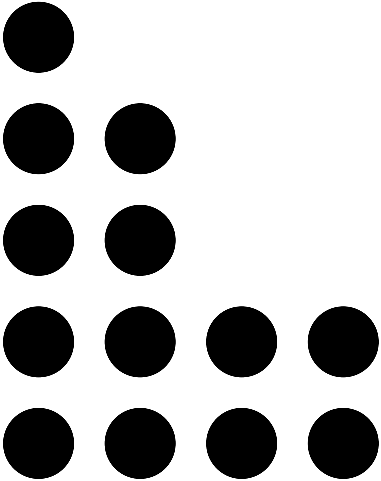
Salta animazione



$\boxed{0}$

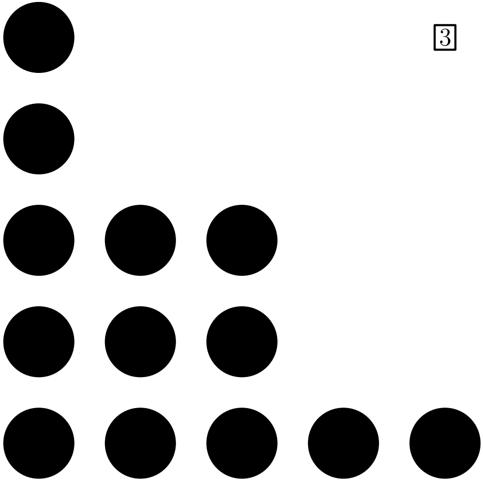
$\boxed{1}$



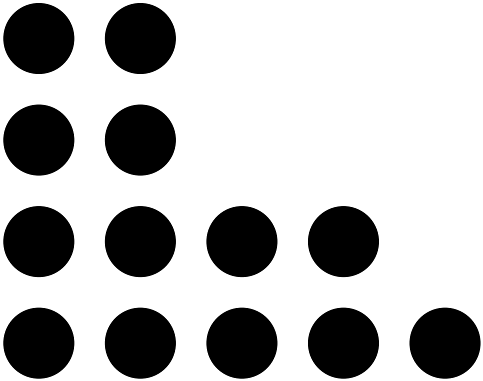


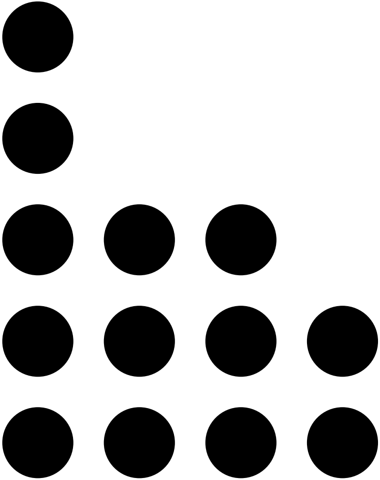
$\boxed{2}$

$\boxed{3}$



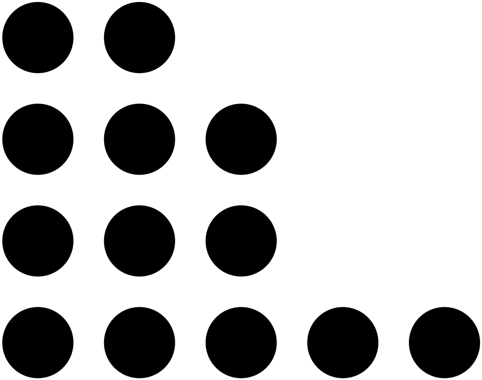
$\boxed{4}$



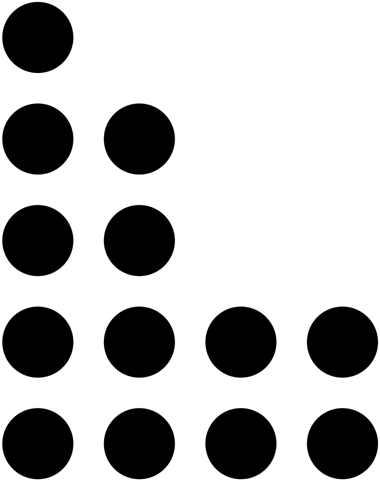


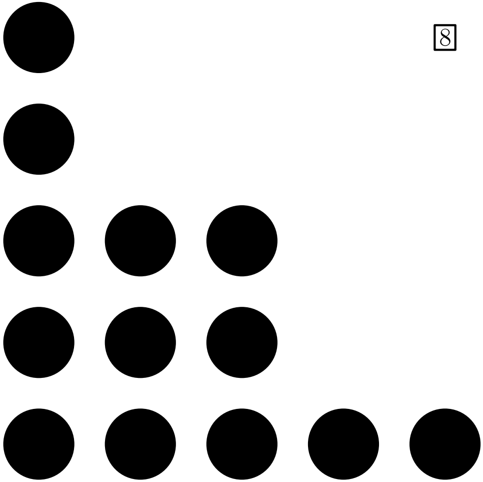
$\boxed{5}$

$\boxed{6}$



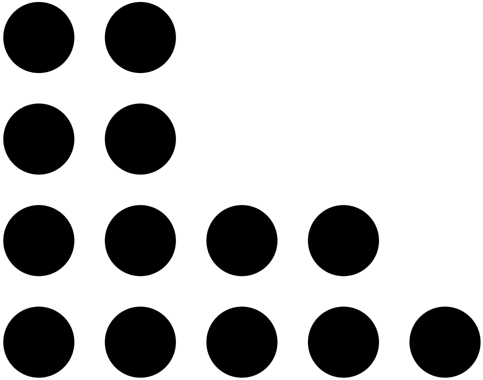
$\boxed{7}$

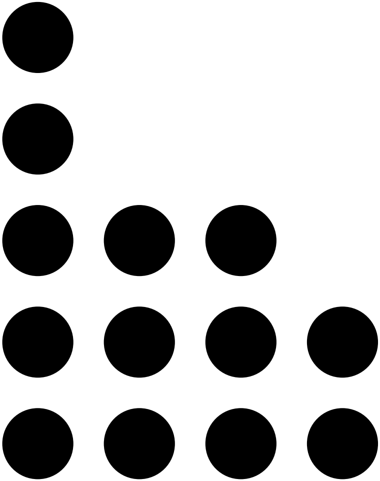




8

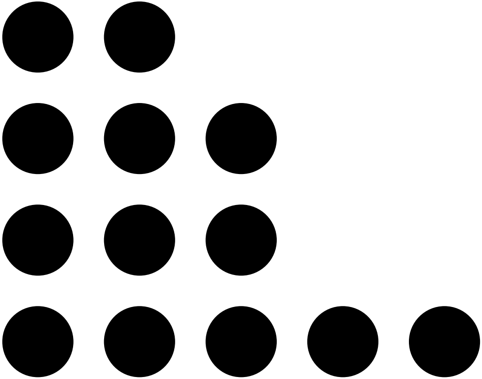
$\boxed{9}$

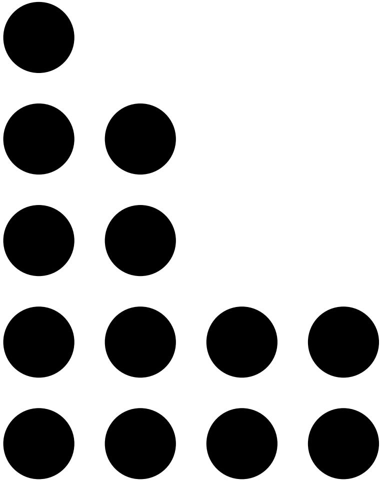




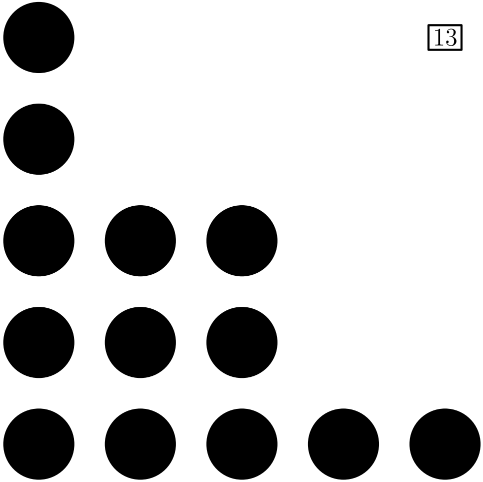
$\boxed{10}$

$\boxed{11}$

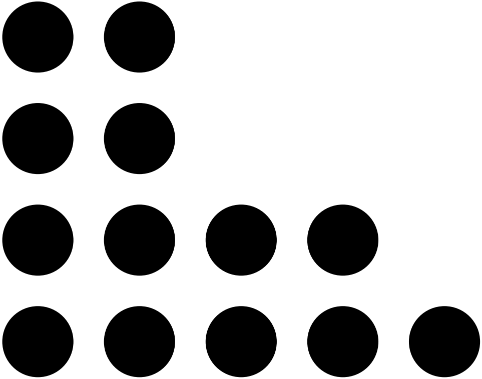


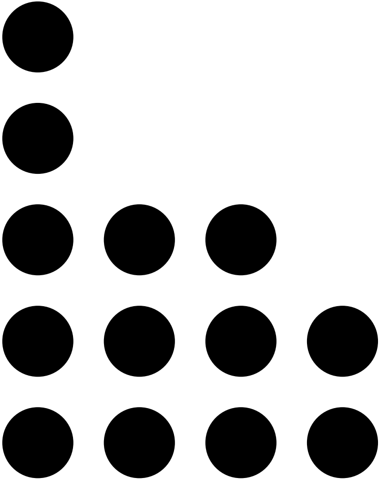


$\boxed{12}$


13

$\boxed{14}$





$\boxed{15}$

Fine animazione 5 3 3 2

Torna indietro

Altre configurazioni periodiche

Ha periodo 5.
Essa è un cosiddetto **gruppo di marcia aumentato**, ovvero si ottiene da un gruppo di marcia (triangolare) aumentando di uno qualche mucchio (anche il primo vuoto, eventualmente).

Altre configurazioni periodiche

Ha periodo 5.
Essa è un cosiddetto **gruppo di marcia aumentato**, ovvero si ottiene da un gruppo di marcia (triangolare) aumentando di uno qualche mucchio (anche il primo vuoto, eventualmente).
Infatti:

$$\begin{array}{cc} 5\ 3\ 3\ 2 & = \\ 4\ 3\ 2\ 1 & + \\ 1\ 0\ 1\ 1 & \end{array}$$

Altre configurazioni periodiche

Ha periodo 5.
Essa è un cosiddetto **gruppo di marcia aumentato**, ovvero si ottiene da un gruppo di marcia (triangolare) aumentando di uno qualche mucchio (anche il primo vuoto, eventualmente).
Infatti:

$$
\begin{array}{cr}
5\ 3\ 3\ 2 & = \\
4\ 3\ 2\ 1 & + \\
1\ 0\ 1\ 1 &
\end{array}
$$

Anche i gruppi di marcia aumentati sono periodici, e il loro periodo è un fattore della lunghezza della configurazione triangolare sottostante, aumentata di 1.

Altre configurazioni periodiche

Ha periodo 5.
Essa è un cosiddetto **gruppo di marcia aumentato**, ovvero si ottiene da un gruppo di marcia (triangolare) aumentando di uno qualche mucchio (anche il primo vuoto, eventualmente).
Infatti:

$$\begin{array}{cc} 5\ 3\ 3\ 2 & = \\ 4\ 3\ 2\ 1 & + \\ 1\ 0\ 1\ 1 & \end{array}$$

Anche i gruppi di marcia aumentati sono periodici, e il loro periodo è un fattore della lunghezza della configurazione triangolare sottostante, aumentata di 1.
In questo caso la lunghezza del numero triangolare è 4, e se lo aumentiamo di 1 troviamo 5 che è primo, quindi il periodo non può che essere 5.

Gruppi di marcia aumentati

Vediamo altri due esempi con 17 semi:

Gruppi di marcia aumentati

Vediamo altri due esempi con 17 semi:

$$
\begin{array}{cc}
5\ 5\ 3\ 2\ 2 & = \\
5\ 4\ 3\ 2\ 1 & + \\
0\ 1\ 0\ 0\ 1 &
\end{array}
$$

Gruppi di marcia aumentati

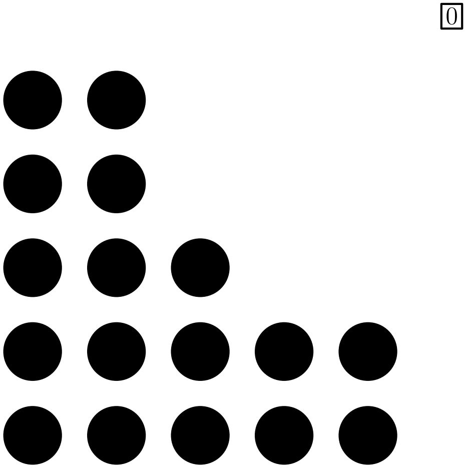
Vediamo altri due esempi con 17 semi:

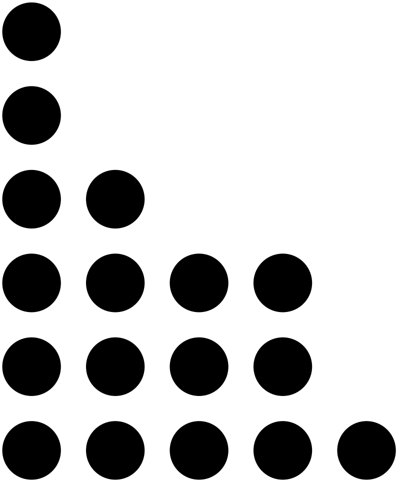
$$\begin{array}{rr} 5\,5\,3\,2\,2 & = \\ 5\,4\,3\,2\,1 & + \\ 0\,1\,0\,0\,1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 5\,4\,3\,3\,2 & = \\ 5\,4\,3\,2\,1 & + \\ 0\,0\,0\,1\,1 & \end{array}$$

Animazione 5 5 3 2 2

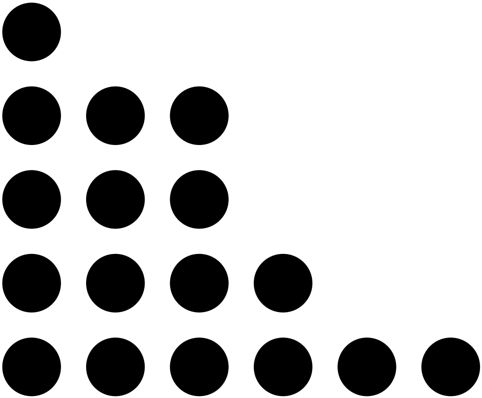
Salta animazione


0

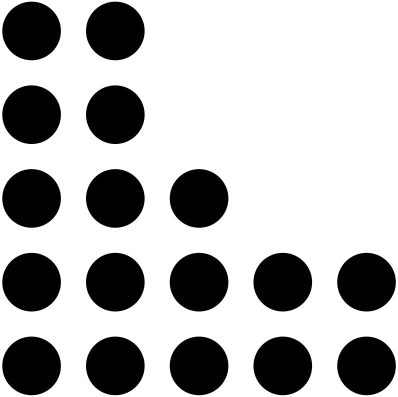


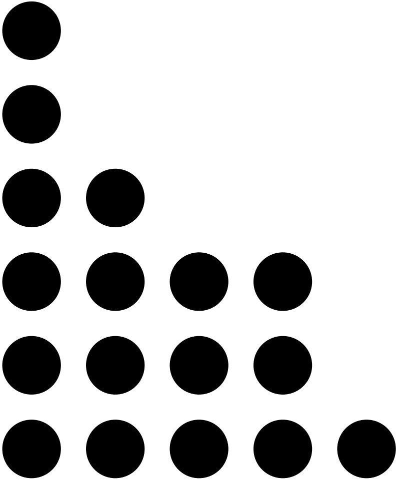
$\boxed{1}$

$\boxed{2}$



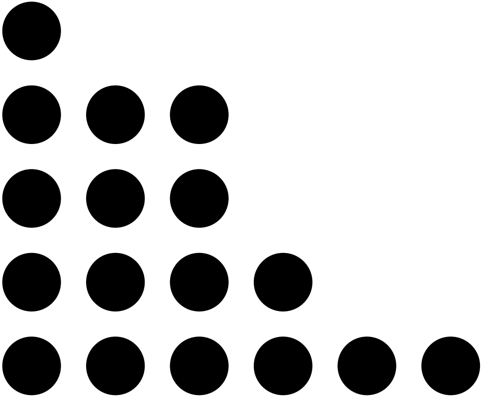
$\boxed{3}$



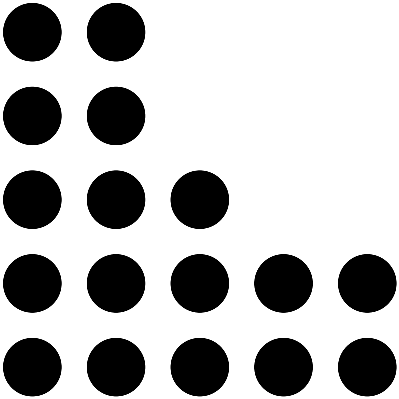


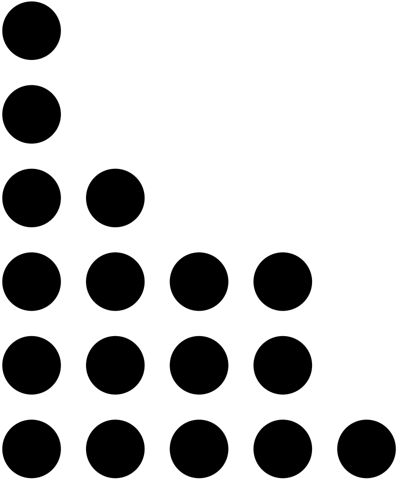
$\boxed{4}$

$\boxed{5}$



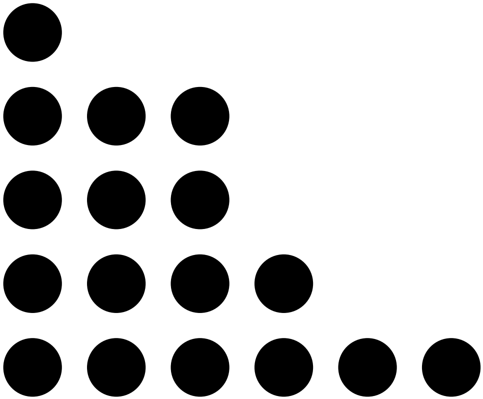
$\boxed{6}$



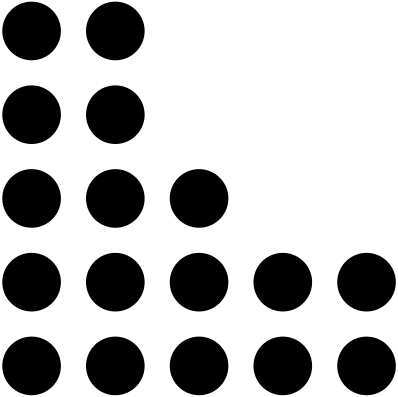


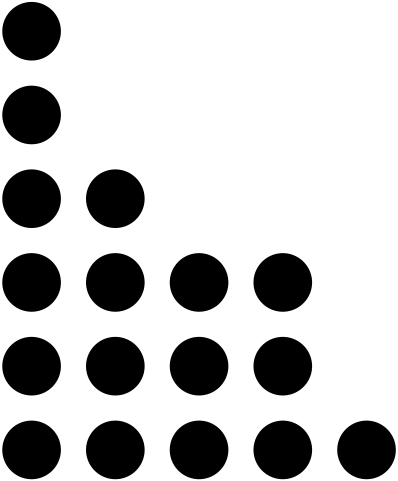
$\boxed{7}$

$\boxed{8}$



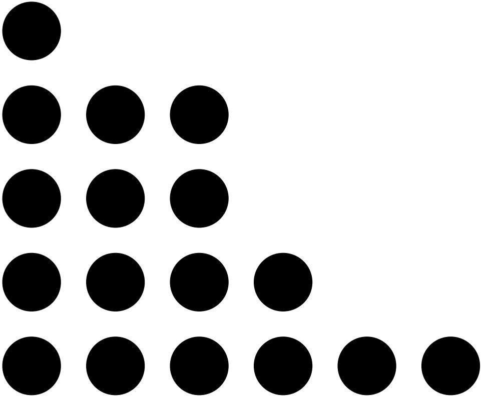
$\boxed{9}$



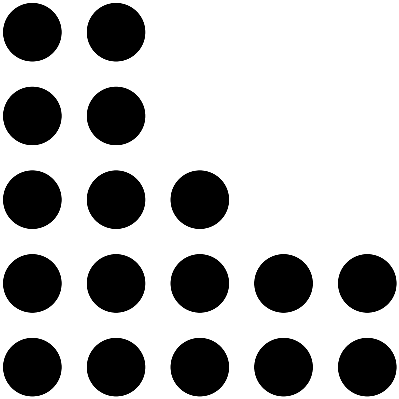


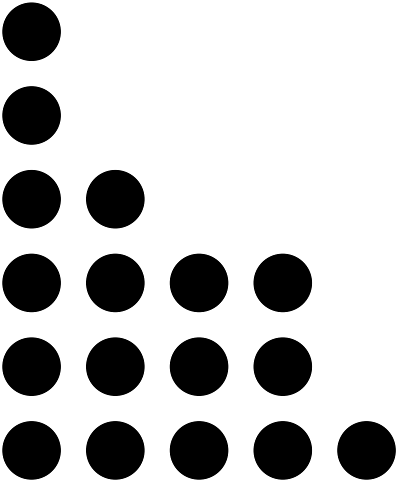
$\boxed{10}$

$\boxed{11}$



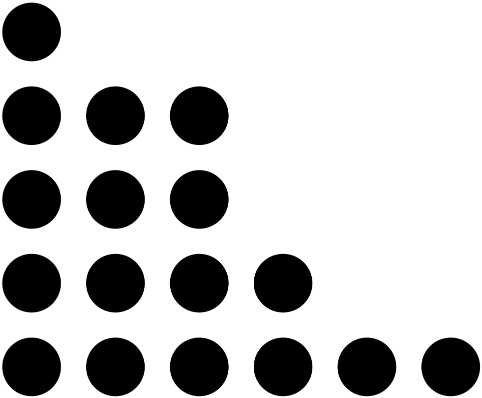
$\boxed{12}$



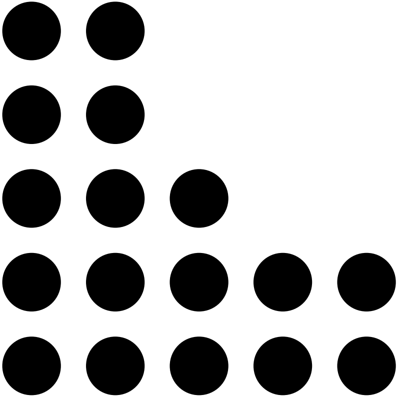


$\boxed{13}$

$\boxed{14}$



$\boxed{15}$



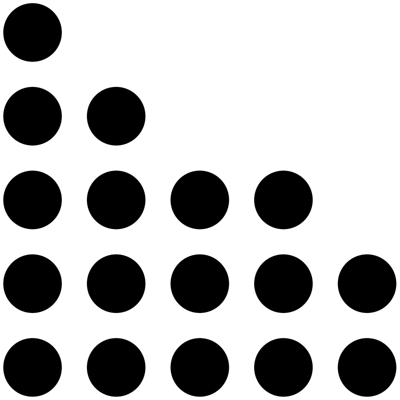
Fine animazione 5 5 3 2 2

Torna indietro

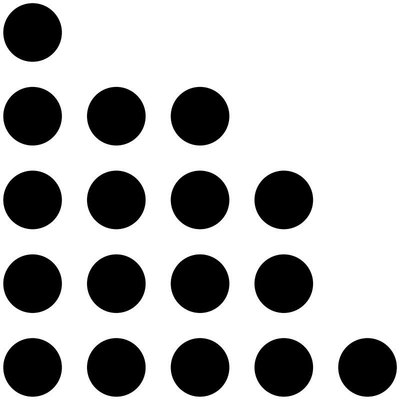
Animazione 5 4 3 3 2

Salta animazione

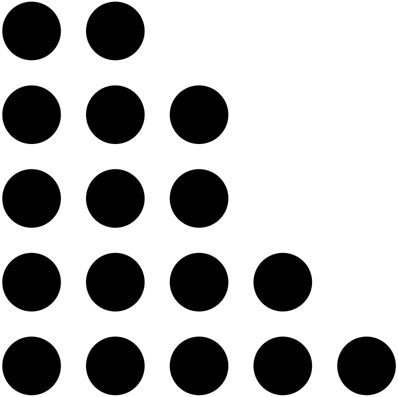
$\boxed{0}$

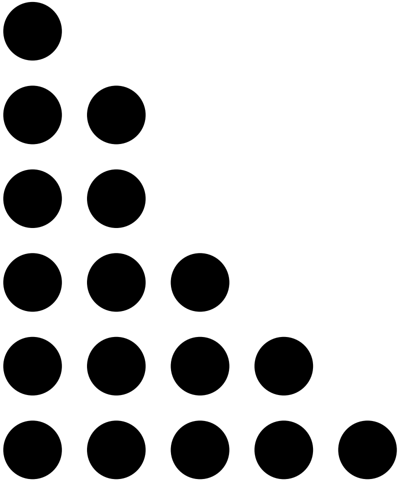


$\boxed{1}$

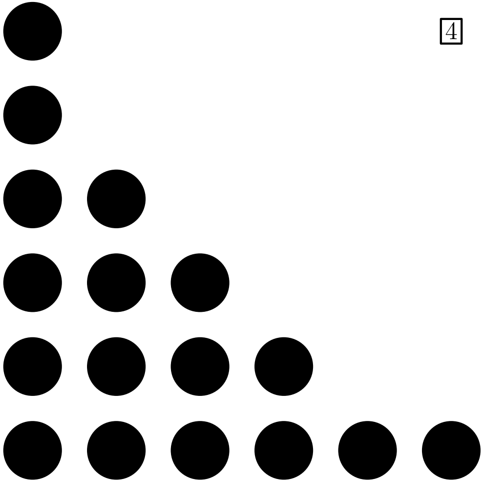


$\boxed{2}$

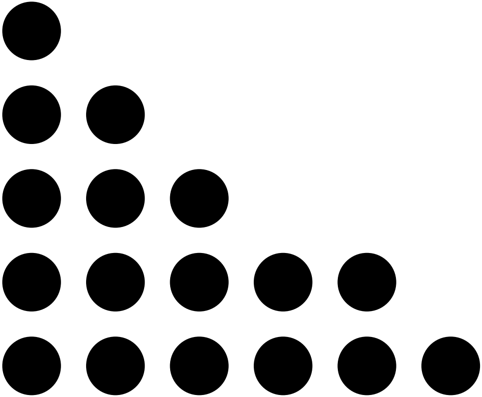




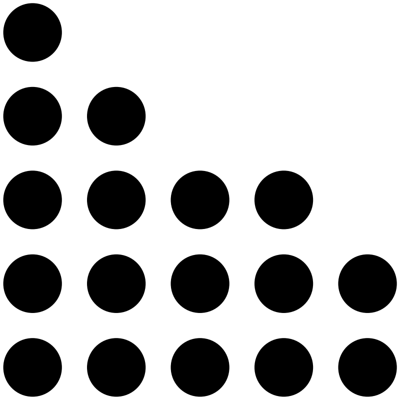
$\boxed{3}$


4

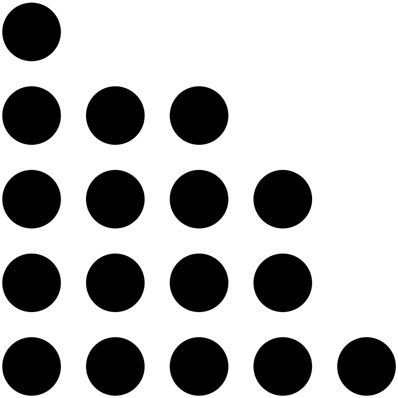
$\boxed{5}$



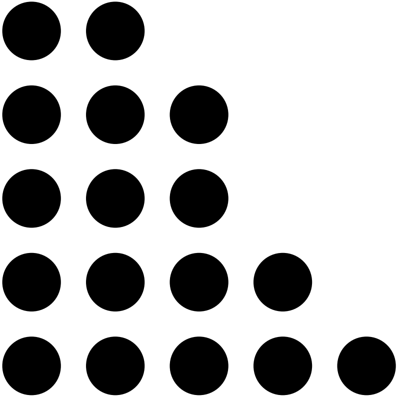
$\boxed{6}$

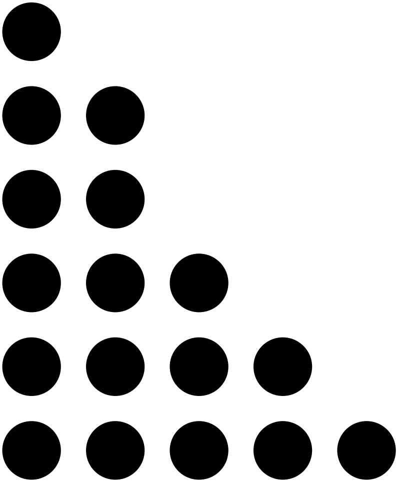


$\boxed{7}$

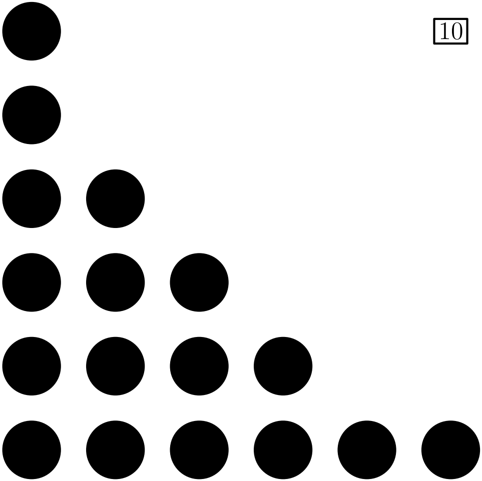


$\boxed{8}$

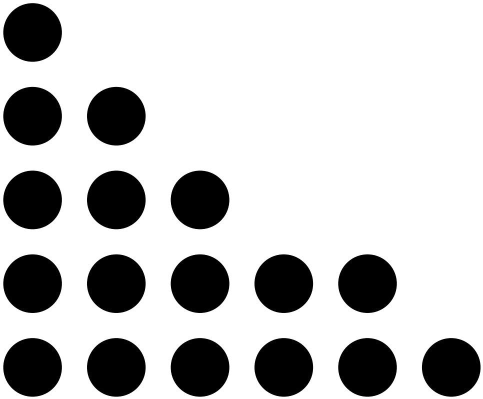




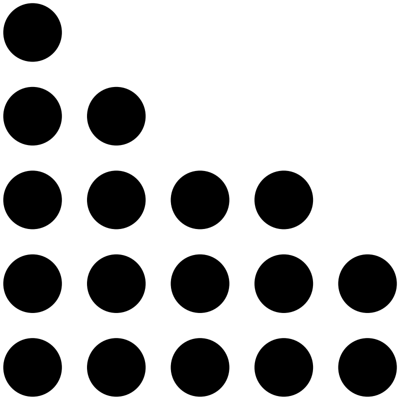
$\boxed{10}$



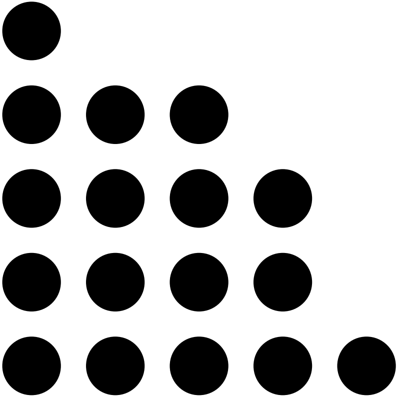
$\boxed{11}$



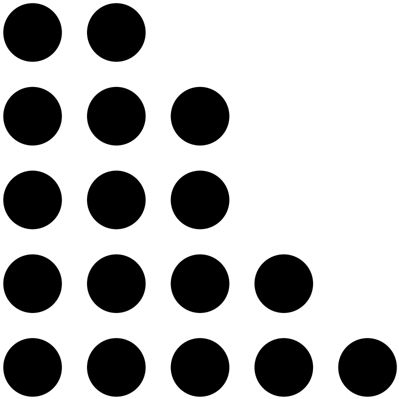
$\boxed{12}$

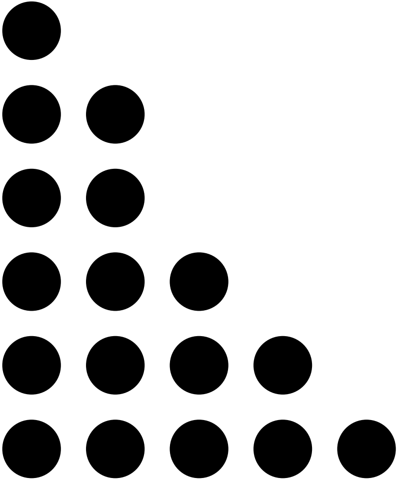


$\boxed{13}$

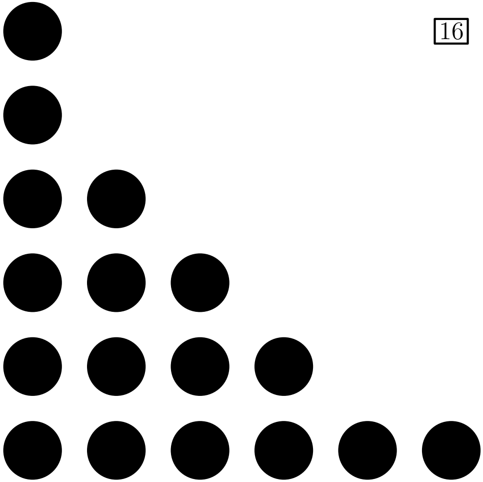


$\boxed{14}$



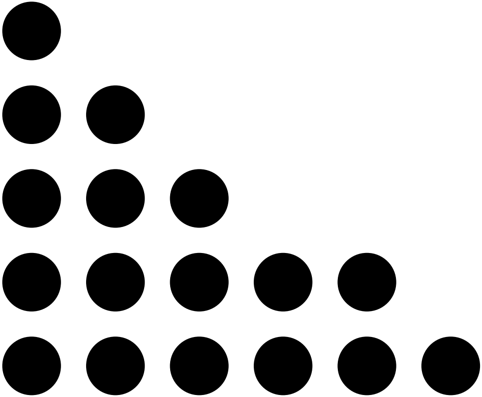


$\boxed{15}$

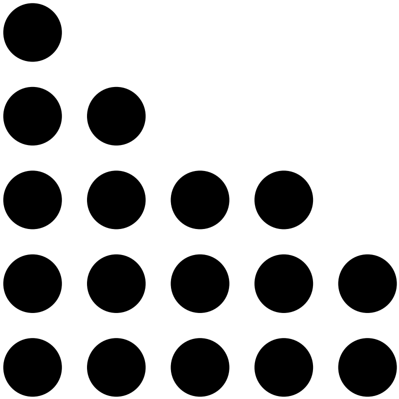


$\boxed{16}$

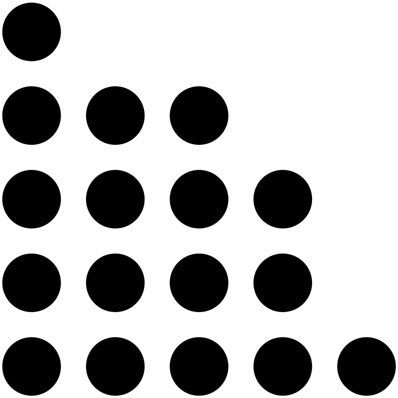
$\boxed{17}$



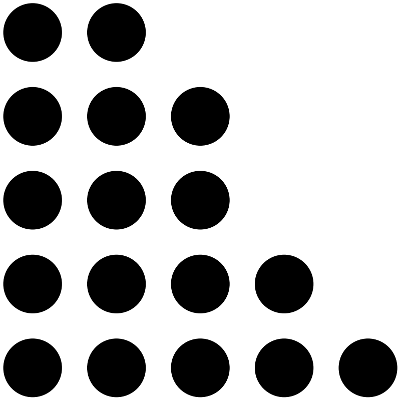
$\boxed{18}$

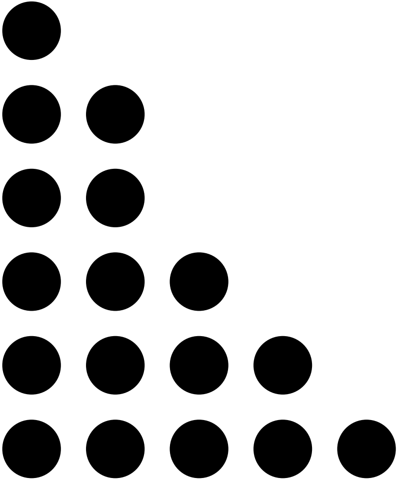


$\boxed{19}$

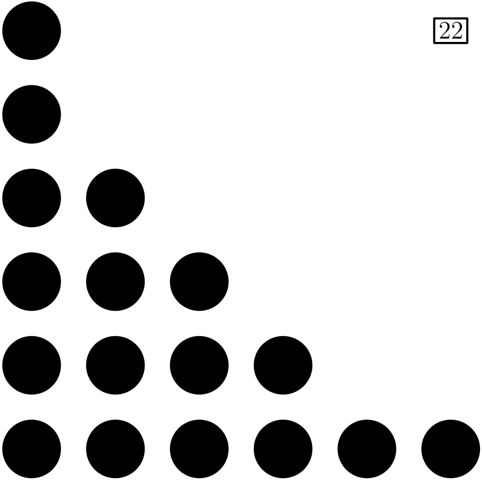


$\boxed{20}$



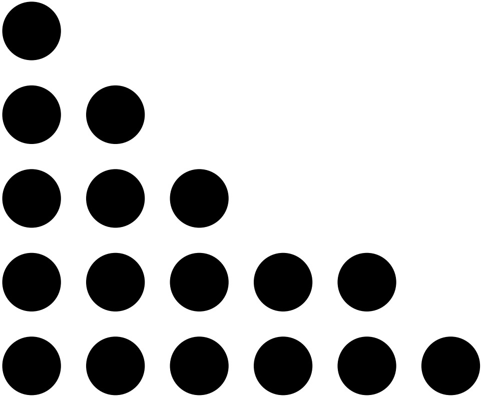


$\boxed{21}$

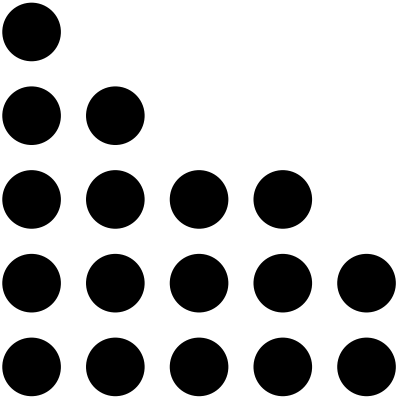


$\boxed{22}$

$\boxed{23}$



$\boxed{24}$



Fine animazione 5 4 3 3 2

Torna indietro

Gruppi di marcia aumentati

Come si è visto, il primo gruppo ha periodo 3 (che è un fattore di 6), mentre il secondo ha periodo 6.

Come si è visto, il primo gruppo ha periodo 3 (che è un fattore di 6), mentre il secondo ha periodo 6.
Possiamo enunciare un teorema:

Gruppi di marcia aumentati

Come si è visto, il primo gruppo ha periodo 3 (che è un fattore di 6), mentre il secondo ha periodo 6.
Possiamo enunciare un teorema:

Teorema

I gruppi di marcia e i gruppi di marcia aumentati sono le uniche configurazioni periodiche del Mancala aperto.

Gruppi di marcia aumentati

Come si è visto, il primo gruppo ha periodo 3 (che è un fattore di 6), mentre il secondo ha periodo 6.
Possiamo enunciare un teorema:

Teorema

I gruppi di marcia e i gruppi di marcia aumentati sono le uniche configurazioni periodiche del Mancala aperto.

Come possiamo dimostrarlo?

Gruppi di marcia aumentati

Come si è visto, il primo gruppo ha periodo 3 (che è un fattore di 6), mentre il secondo ha periodo 6.
Possiamo enunciare un teorema:

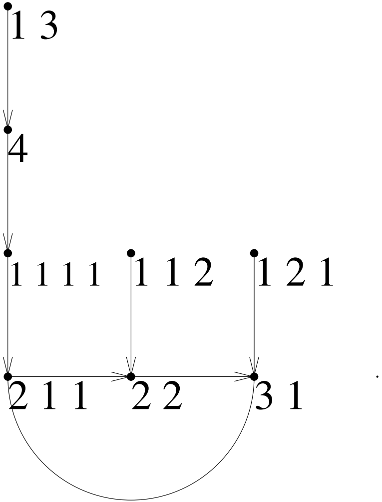
Teorema

I gruppi di marcia e i gruppi di marcia aumentati sono le uniche configurazioni periodiche del Mancala aperto.

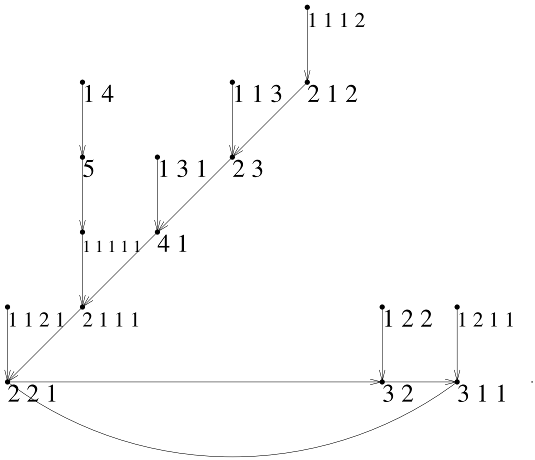
Come possiamo dimostrarlo?

Proviamo a vedere cosa succede nel caso di *pochi* semi.

Il grafo del mancala (4 semi)



Il grafo del mancala (5 semi)



Approccio energetico

Ma come possiamo pensare di fare una dimostrazione generale?

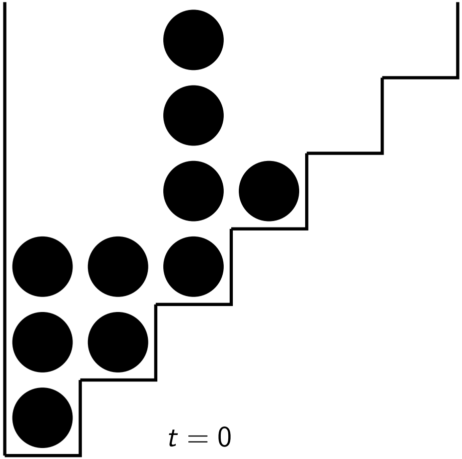
Ma come possiamo pensare di fare una dimostrazione generale?
Accade spesso nella Matematica che convenga vedere le cose da un altro punto di vista.

Approccio energetico

Ma come possiamo pensare di fare una dimostrazione generale?
Accade spesso nella Matematica che convenga vedere le cose da un altro punto di vista.
Useremo l'**approccio energetico**, in cui si pensa che le buche più lontane dalla prima abbiano "energia" più alta.
Vediamo un'animazione della configurazione 3 2 4 1 usando l'approccio energetico.

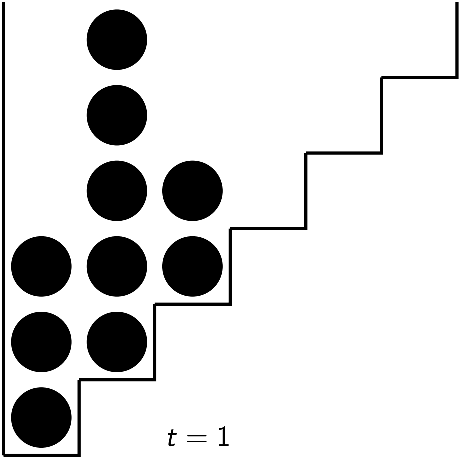
▸ Salta animazione

Approccio energetico



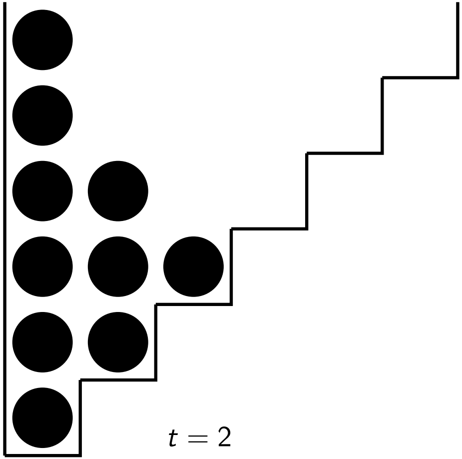
$t = 0$

Approccio energetico

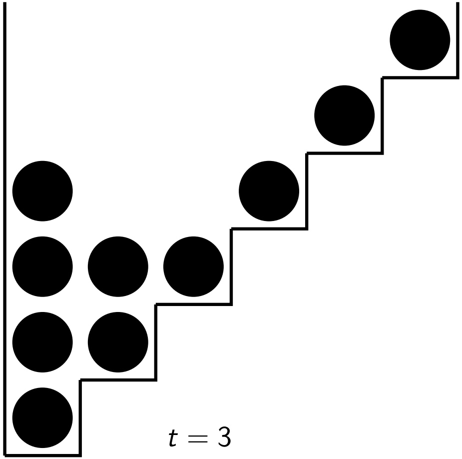


$t = 1$

Approccio energetico

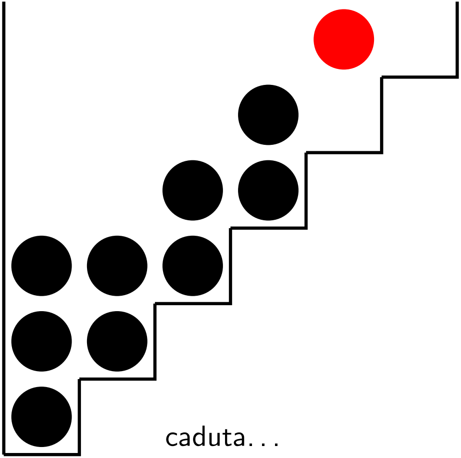


Approccio energetico



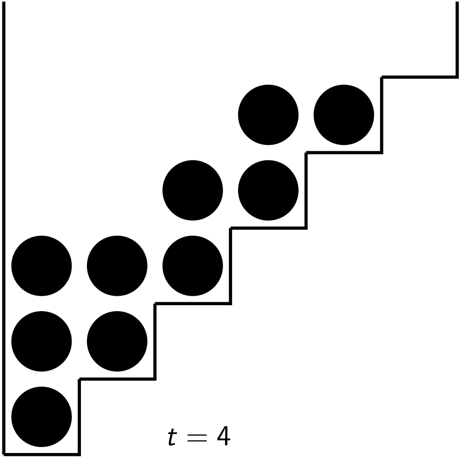
$t = 3$

Approccio energetico



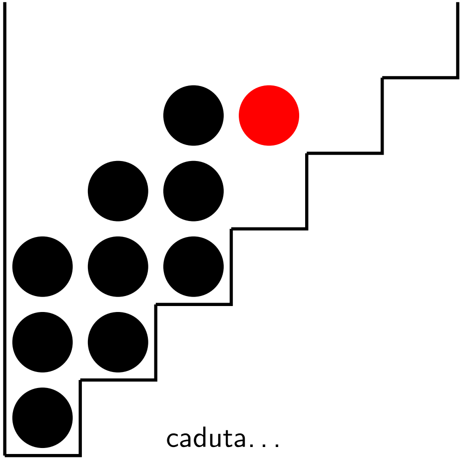
caduta. . .

Approccio energetico



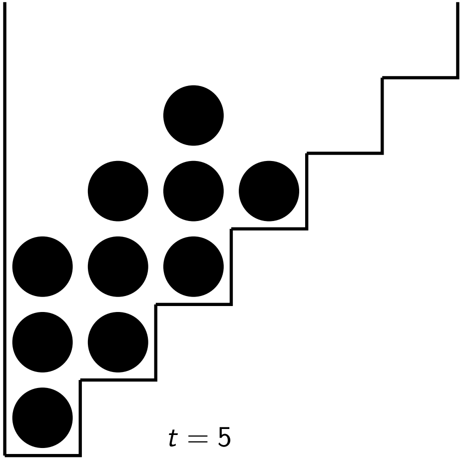
$t = 4$

Approccio energetico



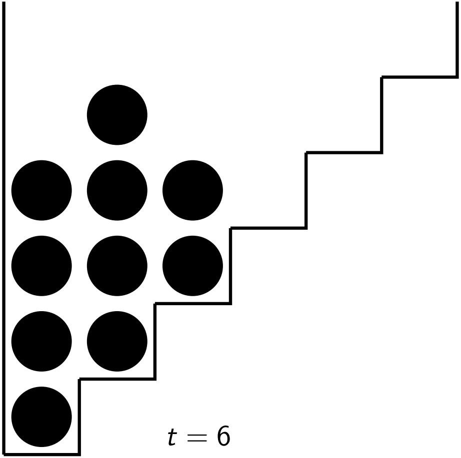
caduta. . .

Approccio energetico



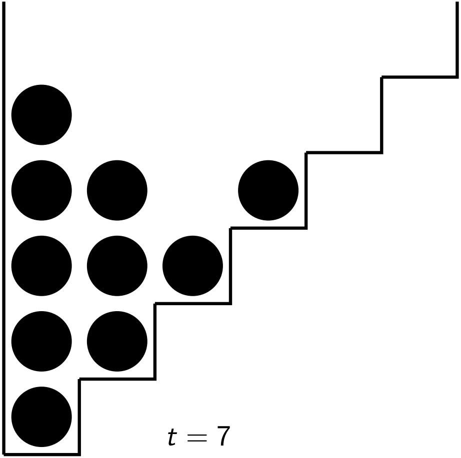
$t = 5$

Approccio energetico



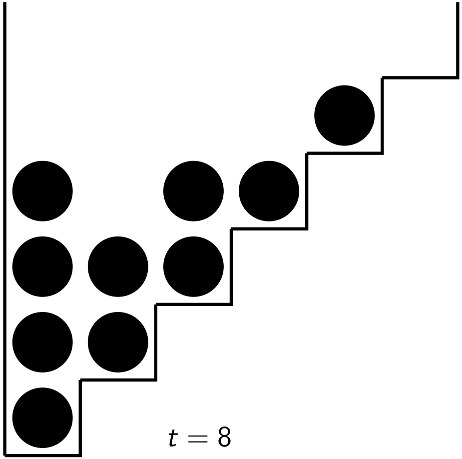
$t = 6$

Approccio energetico



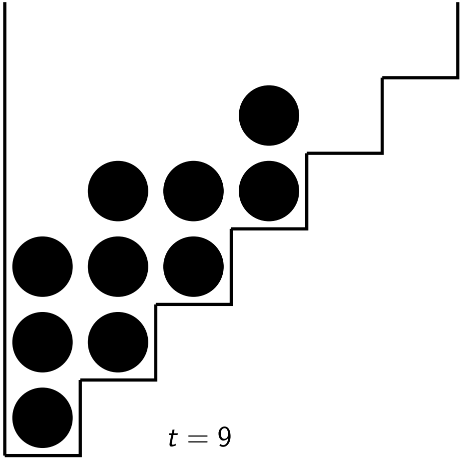
$t = 7$

Approccio energetico



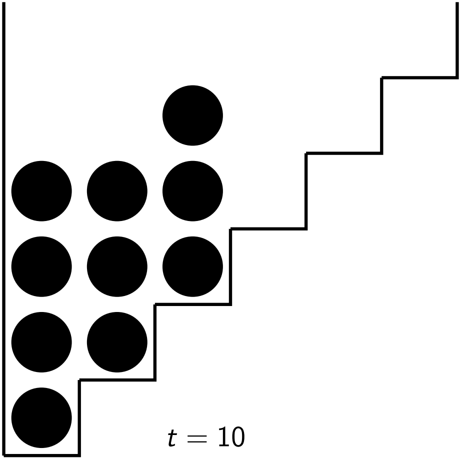
$t = 8$

Approccio energetico



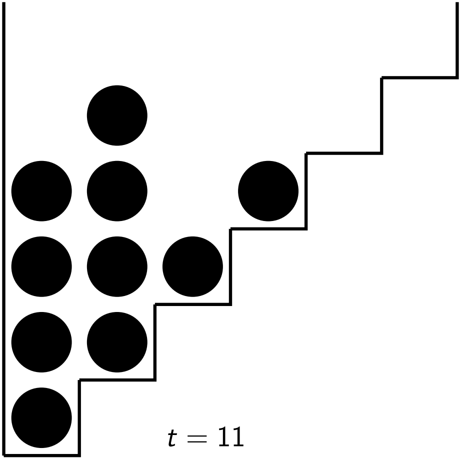
$t = 9$

Approccio energetico



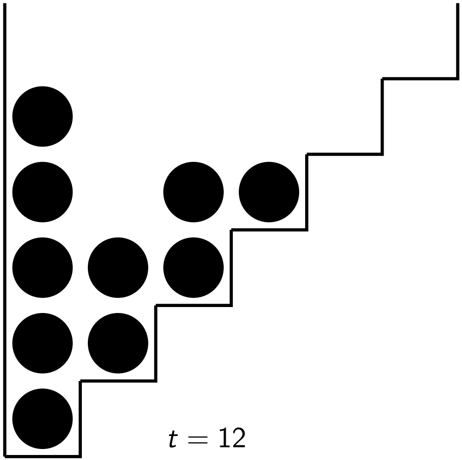
$t = 10$

Approccio energetico



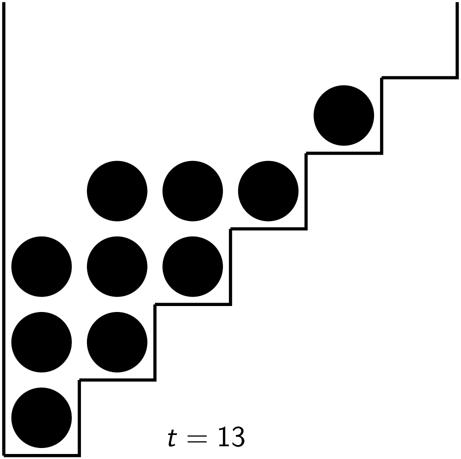
$t = 11$

Approccio energetico



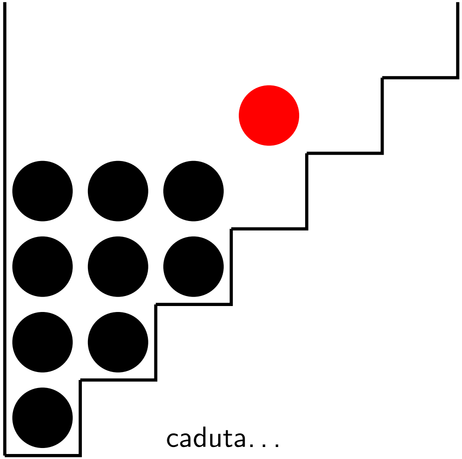
$t = 12$

Approccio energetico



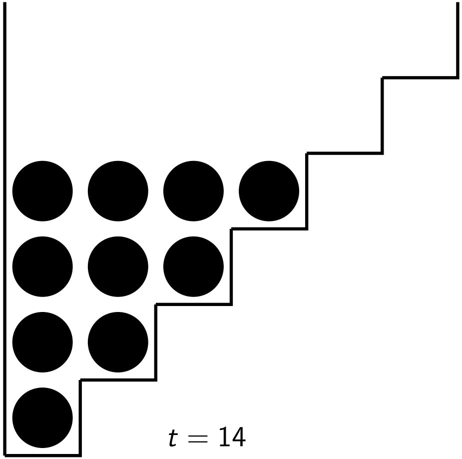
$t = 13$

Approccio energetico



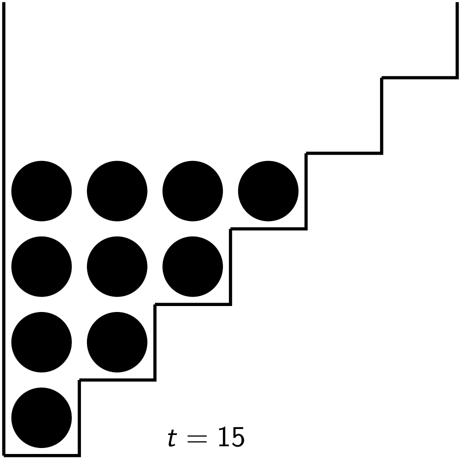
caduta...

Approccio energetico



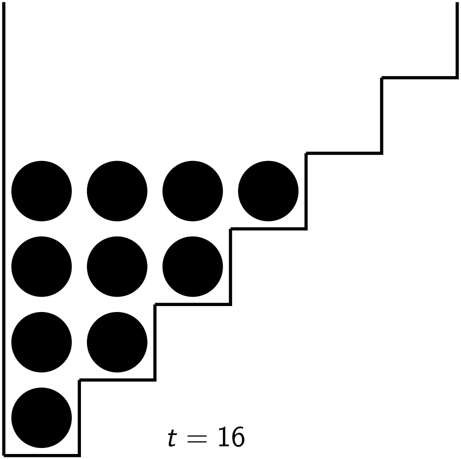
$t = 14$

Approccio energetico



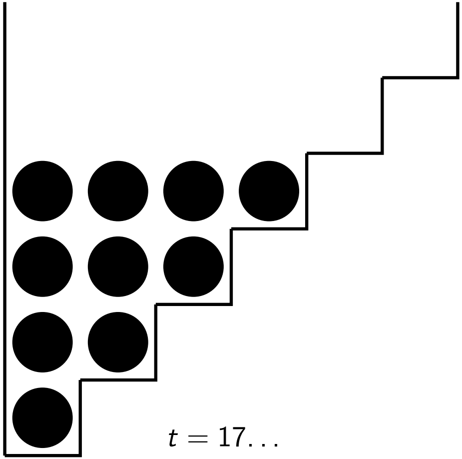
$t = 15$

Approccio energetico



$t = 16$

Approccio energetico



Fine Approccio energetico

Torna indietro

L'appetito vien mangiando. . .

Ora che abbiamo classificato le configurazioni periodiche, ci possiamo fare delle domande più profonde. Ad esempio:

L'appetito vien mangiando. . .

Ora che abbiamo classificato le configurazioni periodiche, ci possiamo fare delle domande più profonde. Ad esempio:

- Su quale gruppo di marcia aumentato andrà a finire una data configurazione di partenza? Che periodo avrà?

L'appetito vien mangiando...

Ora che abbiamo classificato le configurazioni periodiche, ci possiamo fare delle domande più profonde. Ad esempio:

- Su quale gruppo di marcia aumentato andrà a finire una data configurazione di partenza? Che periodo avrà?
- Quante mosse ci vorranno per raggiungere il gruppo di marcia (aumentato)?

L'appetito vien mangiando...

Ora che abbiamo classificato le configurazioni periodiche, ci possiamo fare delle domande più profonde. Ad esempio:

- Su quale gruppo di marcia aumentato andrà a finire una data configurazione di partenza? Che periodo avrà?
- Quante mosse ci vorranno per raggiungere il gruppo di marcia (aumentato)?
- Quali sono le configurazioni più "lontane" da un gruppo di marcia?

Le configurazioni più lontane

Si può dimostrare che, nel caso ad esempio di 15 semi, la configurazione più lontana dal gruppo di marcia è

$$1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2$$

Le configurazioni più lontane

Si può dimostrare che, nel caso ad esempio di 15 semi, la configurazione più lontana dal gruppo di marcia è

$$1 \; 2 \; 1 \; 2 \; 1 \; 1 \; 2 \; 1 \; 1 \; 1 \; 2$$

La sequenza di mosse è la seguente:

Le configurazioni più lontane

Si può dimostrare che, nel caso ad esempio di 15 semi, la configurazione più lontana dal gruppo di marcia è

$$1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 2$$

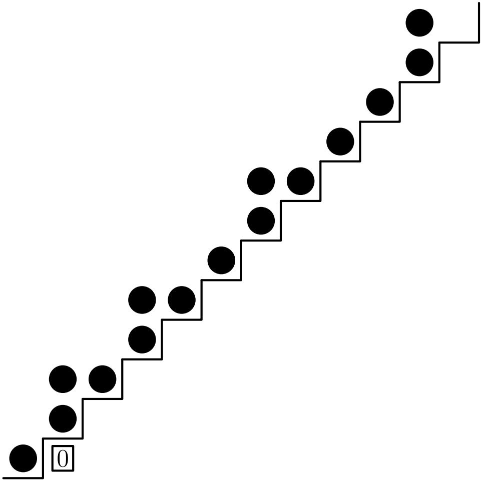
La sequenza di mosse è la seguente:
1 2 1 2 1 1 2 1 1 1 2 $\to$ 3 1 2 1 1 2 1 1 1 2 $\to$ 2 3 2 1 2 1 1 1 2
$\to$ 4 3 1 2 1 1 1 2 $\to$ 4 2 3 2 1 1 2 $\to$ 3 4 3 2 1 2 $\to$ 5 4 3 1 2
$\to$ 5 4 2 3 1 $\to$ 5 3 4 2 1 $\to$ 4 5 3 2 1 $\to$ 6 4 3 2 $\to$ 5 4 3 1 1 1
$\to$ 5 4 2 2 2 $\to$ 5 3 3 3 1 $\to$ 4 4 4 2 1 $\to$ 5 5 3 2 $\to$ 6 4 3 1 1
$\to$ 5 4 2 2 1 1 $\to$ 5 3 3 2 2 $\to$ 4 4 3 3 1 $\to$ 5 4 4 2 $\to$ 5 5 3 1 1
$\to$ 6 4 2 2 1 $\to$ 5 3 3 2 1 1 $\to$ 4 4 3 2 2 $\to$ 5 4 3 3 $\to$ 5 4 4 1 1
$\to$ 5 5 2 2 1 $\to$ 6 3 3 2 1 $\to$ 4 4 3 2 1 1 $\to$ 5 4 3 2 1 $\to$ 5 4 3 2 1

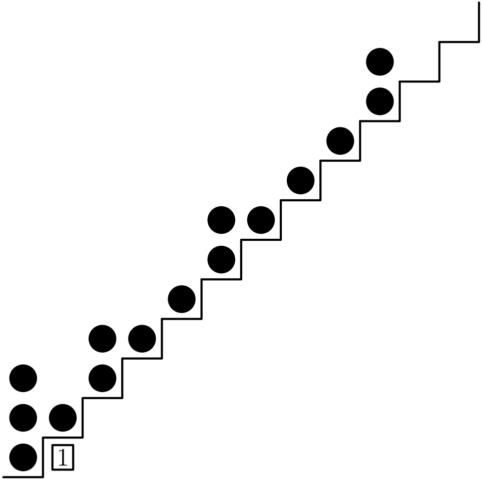
Le configurazioni più lontane

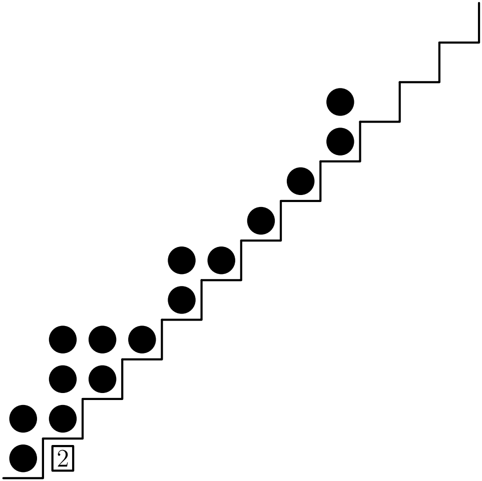
Si può dimostrare che, nel caso ad esempio di 15 semi, la configurazione più lontana dal gruppo di marcia è

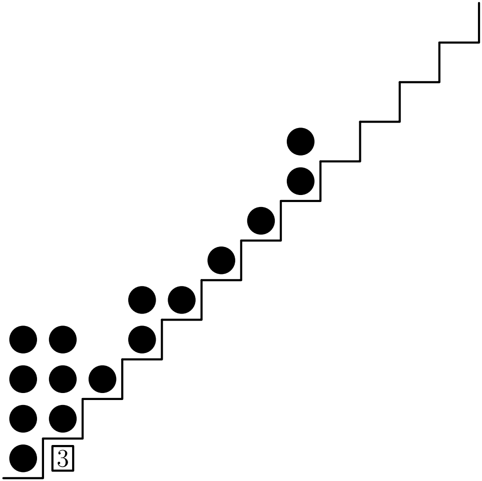
1 2 1 2 1 1 2 1 1 1 2

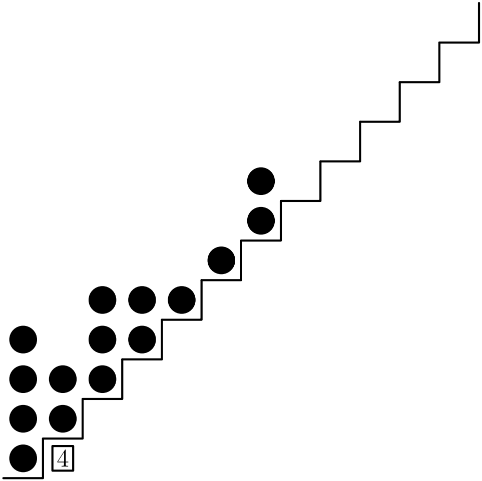
La sequenza di mosse è la seguente:
1 2 1 2 1 1 2 1 1 1 2 → 3 1 2 1 1 2 1 1 1 2 → 2 3 2 1 2 1 1 1 2
→ 4 3 1 2 1 1 1 2 → 4 2 3 2 1 1 2 → 3 4 3 2 1 2 → 5 4 3 1 2
→ 5 4 2 3 1 → 5 3 4 2 1 → 4 5 3 2 1 → 6 4 3 2 → 5 4 3 1 1 1
→ 5 4 2 2 2 → 5 3 3 3 1 → 4 4 4 2 1 → 5 5 3 2 → 6 4 3 1 1
→ 5 4 2 2 1 1 → 5 3 3 2 2 → 4 4 3 3 1 → 5 4 4 2 → 5 5 3 1 1
→ 6 4 2 2 1 → 5 3 3 2 1 1 → 4 4 3 2 2 → 5 4 3 3 → 5 4 4 1 1
→ 5 5 2 2 1 → 6 3 3 2 1 → 4 4 3 2 1 1 → 5 4 3 2 1 → 5 4 3 2 1
Ci mette 30 mosse prima di diventare periodica!

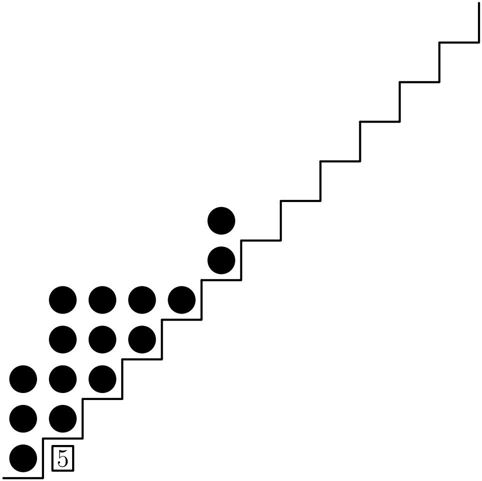

0

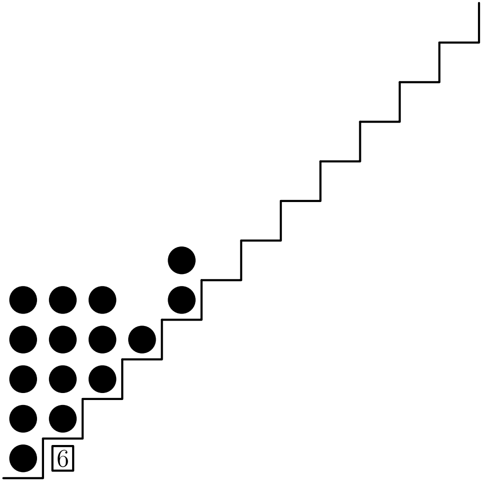

1

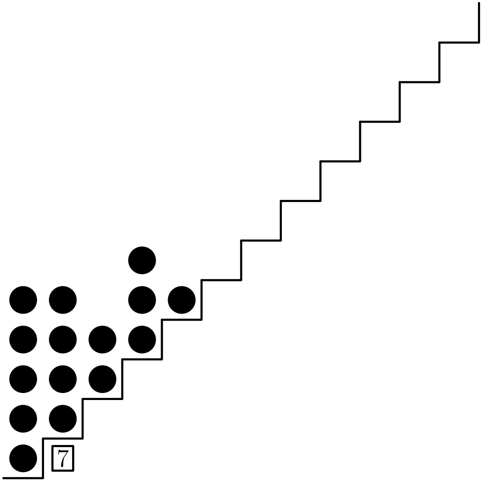

2

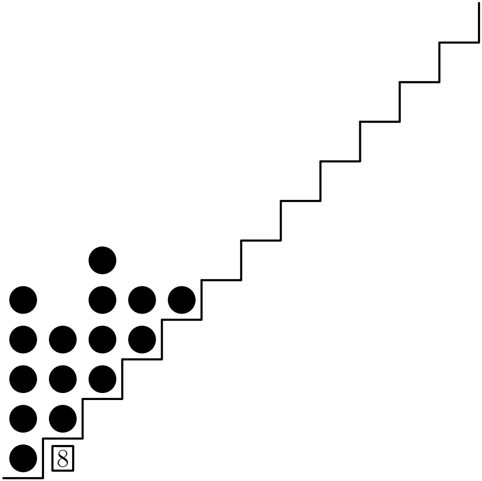

3

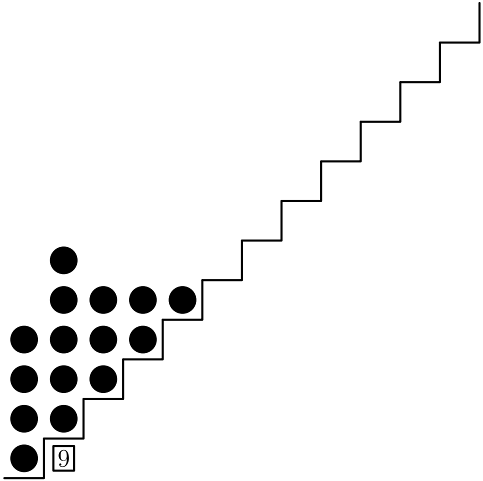

4

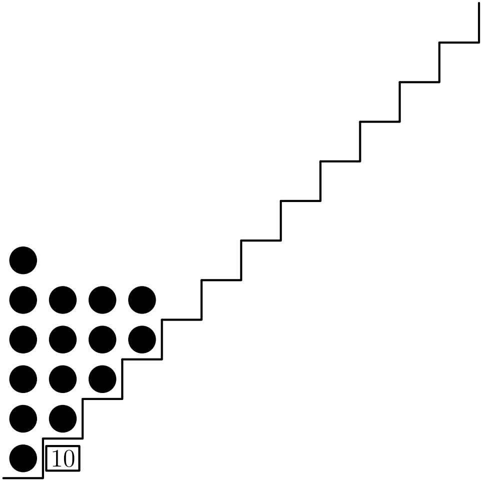

5

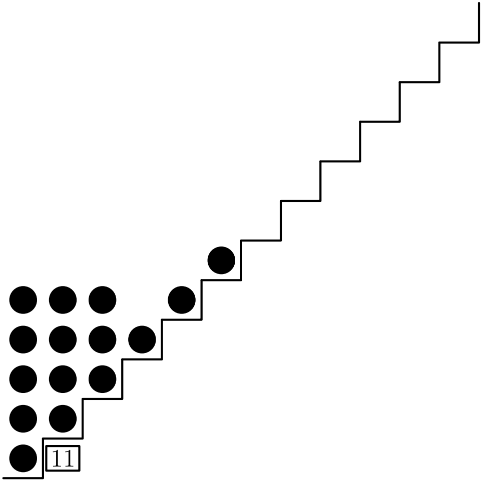

6

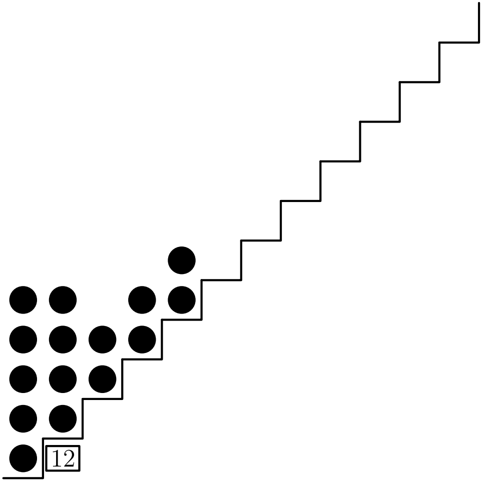

7

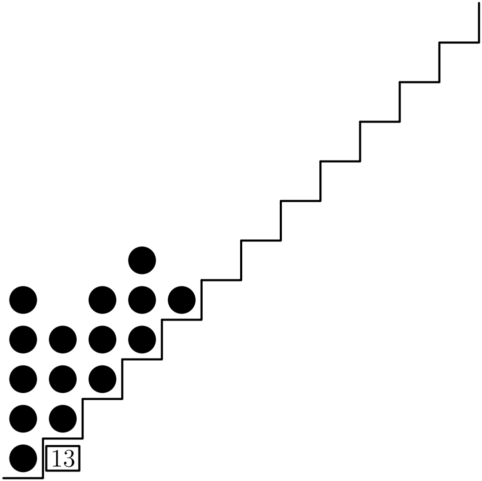

8

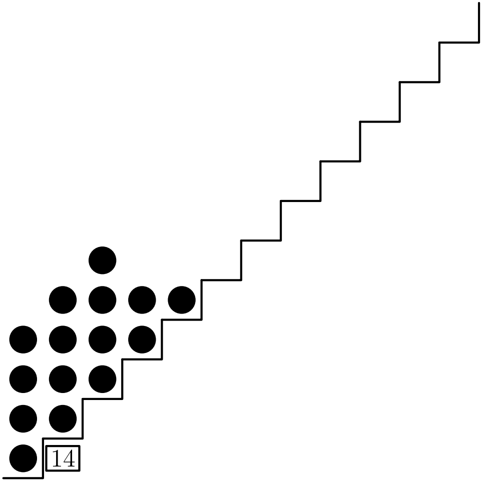

9

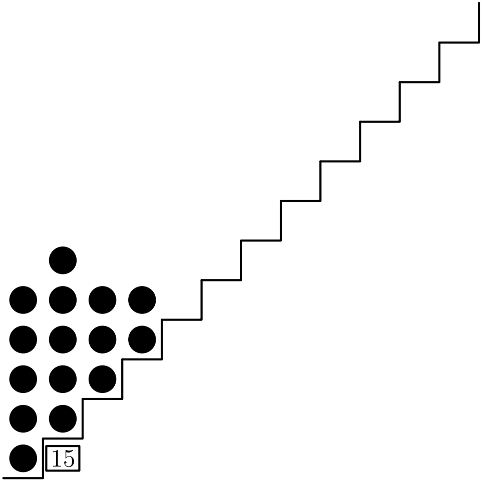

10

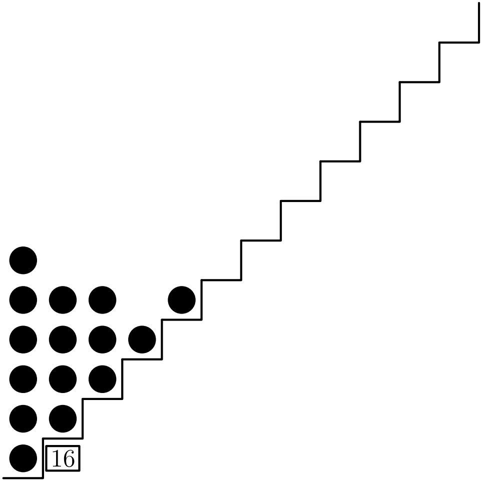

11

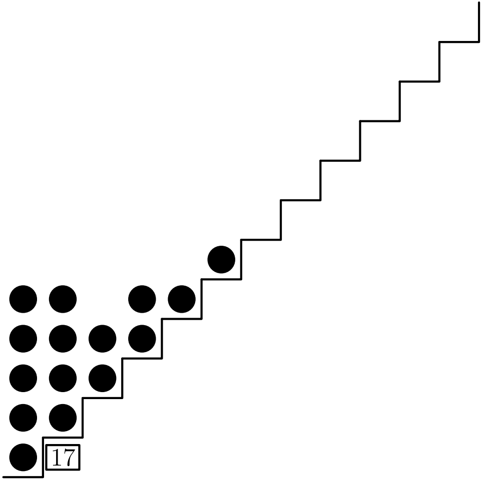

12

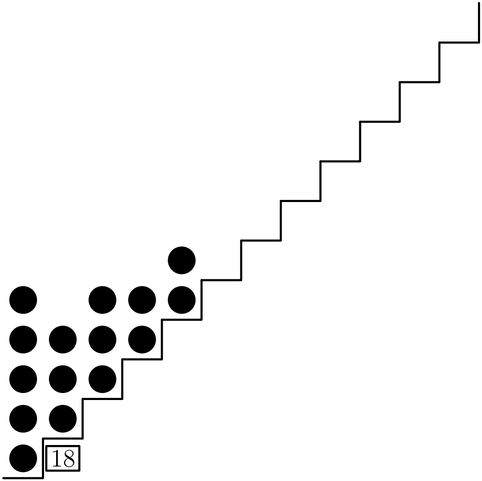

13

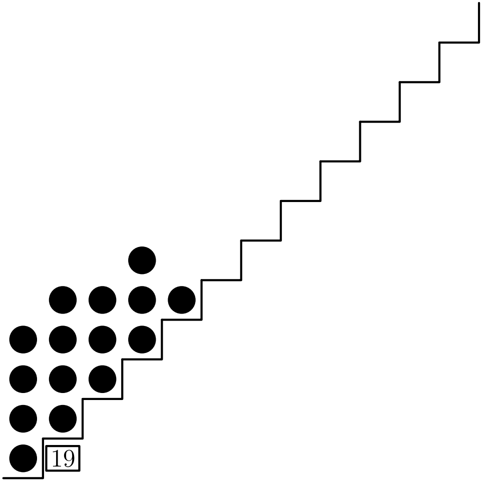

14

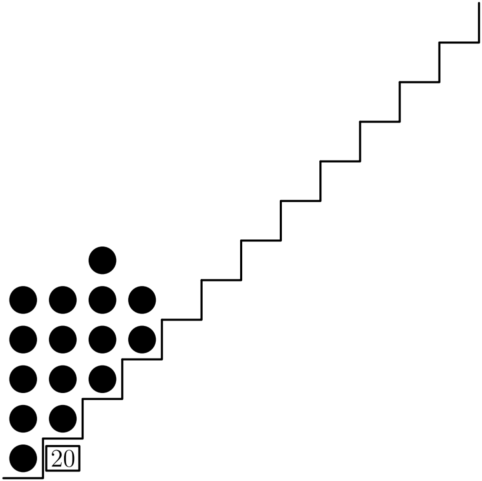

15

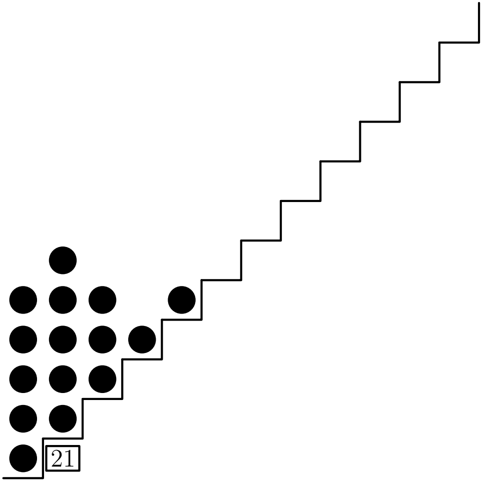

16

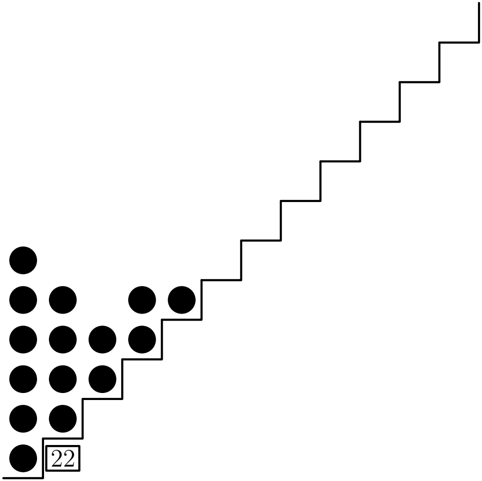

17

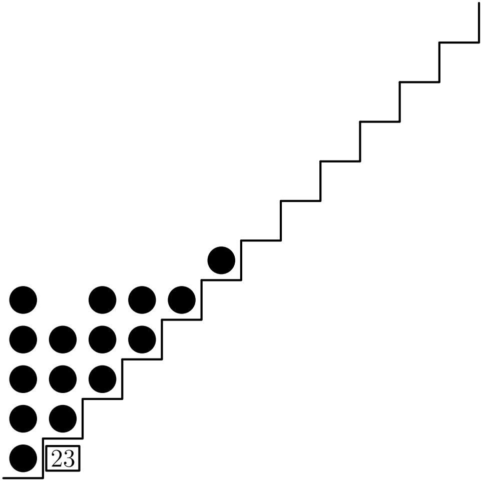

18

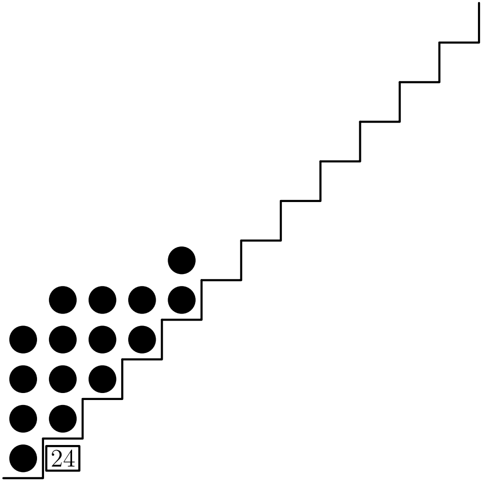

19

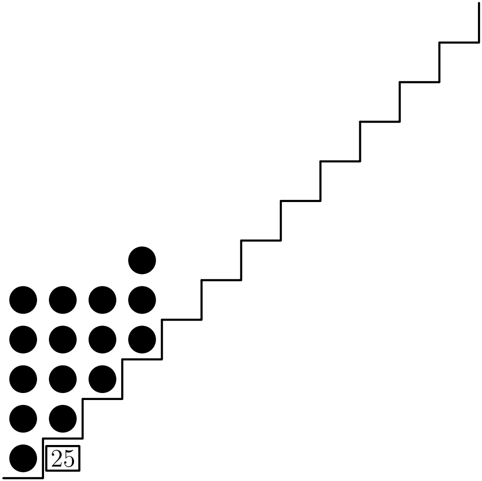

20

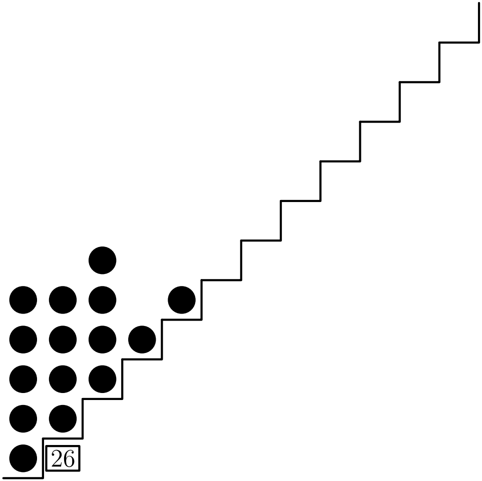

21

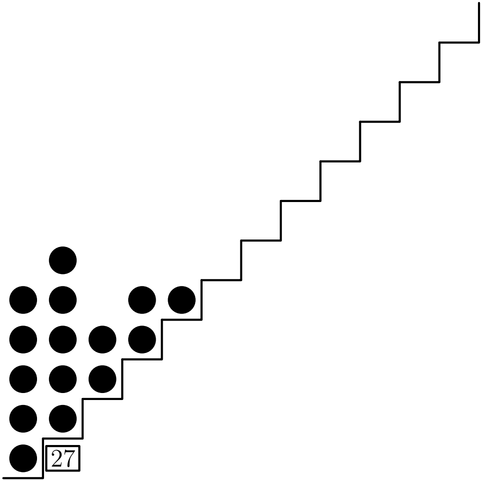

22

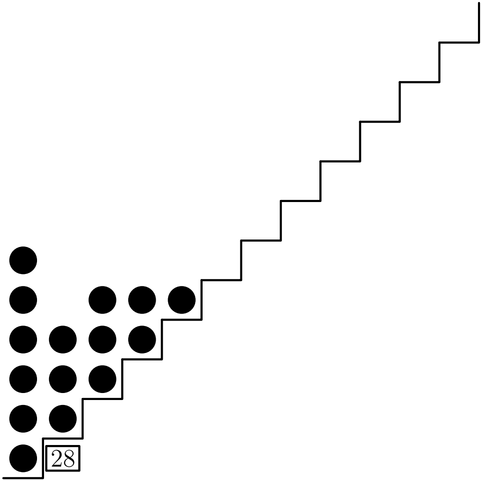

23

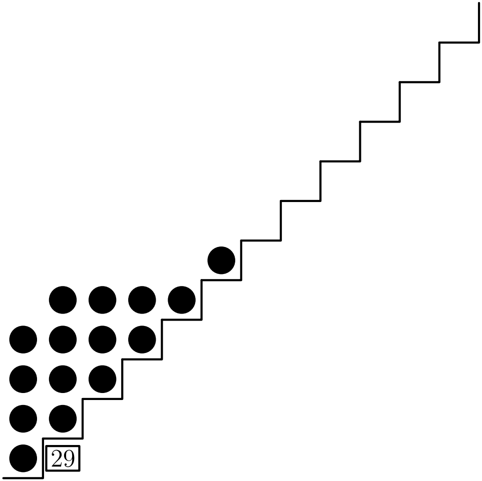

24

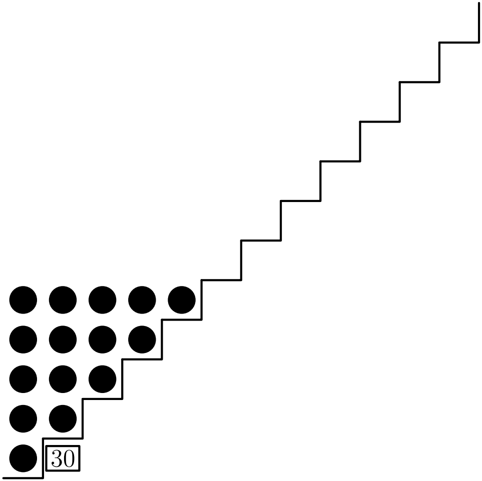

25

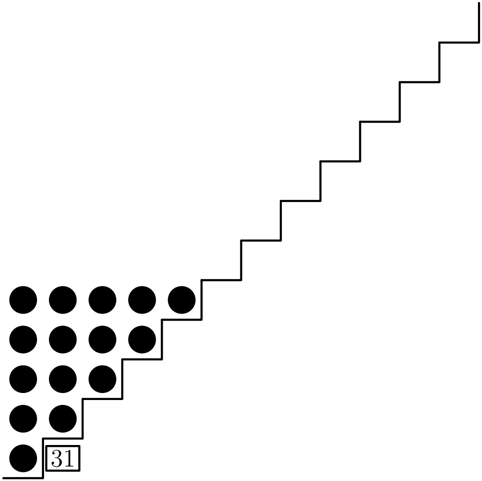

26


27


28


29


30


31

Grazie per l'attenzione!