

La matematica è un rompicapo!

Come fare matematica divertendosi

Maurizio Paolini (paolini@dmf.unicatt.it)

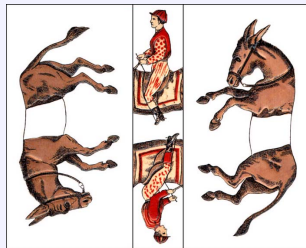
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccoló Tartaglia"
Università Cattolica, Brescia

Liceo Calini, 10 febbraio 2015



- Perché i rompicapi?
- “Se e solo se...”, ovvero costruttiva / non costruttiva, ovvero $\exists/\forall$
- La meccanica del Rubik's Magic
- Decorazioni sì, decorazioni no
- Invarianti
- Il modello
- Caccia alla forma

Rompicapi... e rompicapi



Perché i rompicapi?

Perché alcuni rompicapi affascinano i matematici?

- Sono una sfida...
- Anche la natura pone delle sfide
- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!
- Però un rompicapo è stato ideato da un uomo, che spesso cerca di realizzare concretamente un modello ideale che ha in testa

Esempio: il cubo di Rubik “concreto” ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Perché i rompicapi?

Perché alcuni rompicapi affascinano i matematici?

- Sono una sfida...
- Anche la natura pone delle sfide
- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!
- Però un rompicapo è stato ideato da un uomo, che spesso cerca di realizzare concretamente un modello ideale che ha in testa

Esempio: il cubo di Rubik “concreto” ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Perché i rompicapi?

Perché alcuni rompicapi affascinano i matematici?

- Sono una sfida...
- Anche la natura pone delle sfide
- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!
- Però un rompicapo è stato ideato da un uomo, che spesso cerca di realizzare concretamente un modello ideale che ha in testa

Esempio: il cubo di Rubik “concreto” ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Perché i rompicapi?

Perché alcuni rompicapi affascinano i matematici?

- Sono una sfida...
- Anche la natura pone delle sfide
- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!
- Però un rompicapo è stato ideato da un uomo, che spesso cerca di realizzare concretamente un modello ideale che ha in testa

Esempio: il cubo di Rubik “concreto” ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Perché i rompicapi?

Perché alcuni rompicapi affascinano i matematici?

- Sono una sfida...
- Anche la natura pone delle sfide
- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!
- Però un rompicapo è stato ideato da un uomo, che spesso cerca di realizzare concretamente un modello ideale che ha in testa

Esempio: il cubo di Rubik “concreto” ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Perché i rompicapi?

Perché alcuni rompicapi affascinano i matematici?

- Sono una sfida...
- Anche la natura pone delle sfide
- Bisogna semplificare e idealizzare... costruire un modello!
- Però un rompicapo è stato ideato da un uomo, che spesso cerca di realizzare concretamente un modello ideale che ha in testa

Esempio: il cubo di Rubik “concreto” ha come modello un oggetto geometrico fatto di 27 cubi geometrici nello spazio euclideo tridimensionale; a sua volta questo oggetto geometrico si può modellizzare in modo perfetto con un gruppo matematico (nel senso della teoria dei gruppi).

Risolvere i rompicapi [ovvero: ... e viceversa ...]

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). $[8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}]$

Questo avviene con una azione combinata:

Risolvere i rompicapi [ovvero: ... e viceversa ...]

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). $[8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}]$

Questo avviene con una azione combinata:

- Ottenere un insieme $E \subseteq C$, più grande possibile, di configurazioni che si sanno effettivamente ottenere. Questa è la parte “costruttiva”, la meno matematicamente interessante.

Risolvere i rompicapi [ovvero: ... e viceversa ...]

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). [$8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}$]

Questo avviene con una azione combinata:

- Ottenere un insieme $E \subseteq C$, più grande possibile, di configurazioni che si sanno effettivamente ottenere. Questa è la parte “costruttiva”, la meno matematicamente interessante.
- Individuare un insieme P , più grande possibile, di configurazioni che **sicuramente** non si possono ottenere manipolando il rompicapo. Questa è la parte “non costruttiva”, e presenta spesso interessanti spunti matematici. [...diviso 12]

Risolvere i rompicapi [ovvero: ... e viceversa ...]

In genere, analizzare un rompicapo vuol dire

Problema:

Identificare l'insieme $X \subseteq C$ delle configurazioni raggiungibili con manipolazioni ammissibili

Dove C è un insieme di configurazioni che soddisfano opportuni vincoli di base (configurazioni ammissibili). $[8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}]$

Questo avviene con una azione combinata:

- Ottenere un insieme $E \subseteq C$, più grande possibile, di configurazioni che si sanno effettivamente ottenere. Questa è la parte “costruttiva”, la meno matematicamente interessante.
- Individuare un insieme P , più grande possibile, di configurazioni che **sicuramente** non si possono ottenere manipolando il rompicapo. Questa è la parte “non costruttiva”, e presenta spesso interessanti spunti matematici. [...diviso 12]

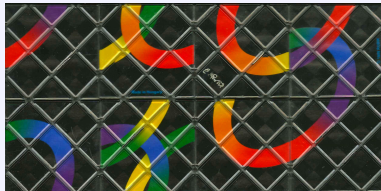
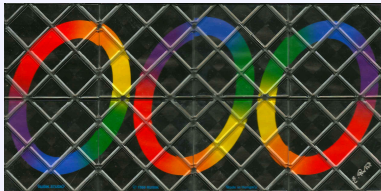
Ovviamente $E \cap P = \emptyset$ e $E \subseteq X \subseteq C \setminus P$.

Se $E \cup P = C$, allora abbiamo individuato X !

Un **invariante** è un oggetto matematico (un numero, un polinomio, un gruppo, ...) che può essere calcolato su una configurazione e che si dimostra essere invariante rispetto alle mosse elementari del rompicapo. Se una configurazione presenta un invariante con valore diverso rispetto a quello che ha nella configurazione iniziale, allora quella configurazione **non** è ottenibile!

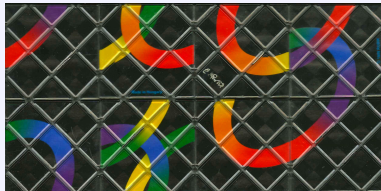
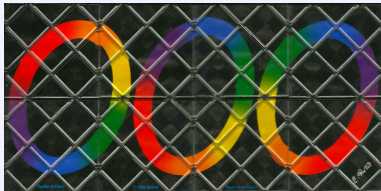
Il Rubik's Magic

Si tratta di 8 tessere rigide quadrate decorate opportunamente e tenute insieme da alcuni fili di nylon.



Il Rubik's Magic

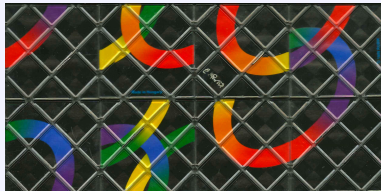
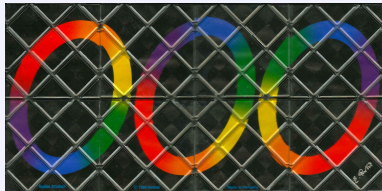
Si tratta di 8 tessere rigide quadrate decorate opportunamente e tenute insieme da alcuni fili di nylon.



E' possibile manipolare il rompicapo ruotando una o più tessere rispetto ai lati con cui sono incernierate alle altre; l'aspetto interessante (e sorprendente) è che il modo con cui sono tra loro incernierate non è fisso, ma può cambiare durante le manipolazioni. Lo scopo dichiarato è quello di sistemare le tessere del "retro" del puzzle in modo da formare il disegno di tre anelli intrecciati. Nel far questo verrà inevitabilmente mescolato il disegno dei tre anelli separati sulla faccia frontale.

Il Rubik's Magic

Si tratta di 8 tessere rigide quadrate decorate opportunamente e tenute insieme da alcuni fili di nylon.



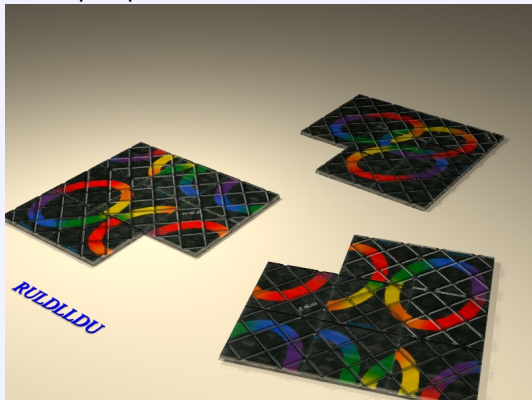
E' possibile manipolare il rompicapo ruotando una o più tessere rispetto ai lati con cui sono incernierate alle altre; l'aspetto interessante (e sorprendente) è che il modo con cui sono tra loro incernierate non è fisso, ma può cambiare durante le manipolazioni. Lo scopo dichiarato è quello di sistemare le tessere del "retro" del puzzle in modo da formare il disegno di tre anelli intrecciati. Nel far questo verrà inevitabilmente mescolato il disegno dei tre anelli separati sulla faccia frontale. [distribuire le 25 copie]

Effetto sorpresa...

Il rompicapo risolto:

Effetto sorpresa...

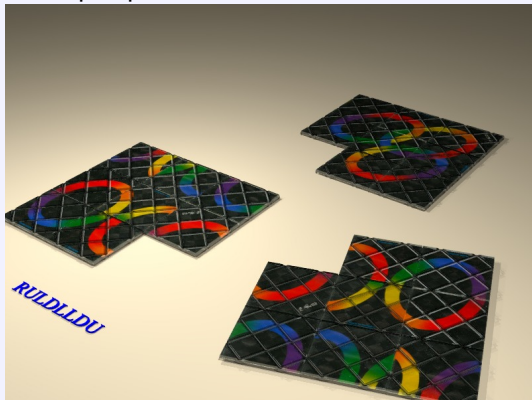
Il rompicapo risolto:



richiede una disposizione delle tessere inaspettata: un quadrato 3×3 senza un angolo.

Effetto sorpresa...

Il rompicapo risolto:

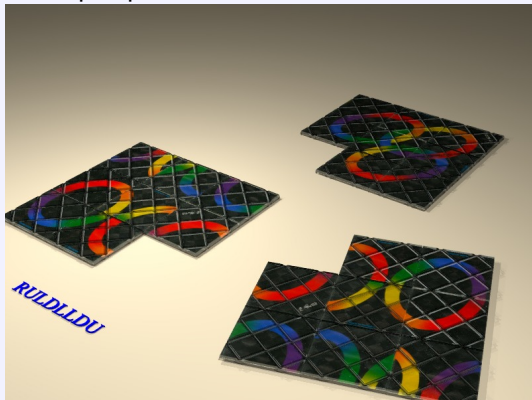


richiede una disposizione delle tessere inaspettata: un quadrato 3×3 senza un angolo.

Record di soluzione:

Effetto sorpresa...

Il rompicapo risolto:



richiede una disposizione delle tessere inaspettata: un quadrato 3×3 senza un angolo.

Record di soluzione:

0.69 secondi!

La meccanica del rompicapo

Le otto tessere, che chiameremo $T_0, T_1, \dots, T_7$,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2 , ecc.

Le otto tessere, che chiameremo $T_0, T_1, \dots, T_7$,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2 , ecc.
- sono sempre incernierate rispetto ad un lato, ciascuna con la successiva

La meccanica del rompicapo

Le otto tessere, che chiameremo $T_0, T_1, \dots, T_7$,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2 , ecc.
- sono sempre incernierate rispetto ad un lato, ciascuna con la successiva
- ma il lato di *incernieramento* può cambiare durante le manipolazioni (effetto Giacobbe)

La meccanica del rompicapo

Le otto tessere, che chiameremo $T_0, T_1, \dots, T_7$,

- sono sempre collegate in una catena chiusa, T_0 con T_1 (e con T_7), T_1 con T_2 , ecc.
- sono sempre incernierate rispetto ad un lato, ciascuna con la successiva
- ma il lato di *incernieramento* può cambiare durante le manipolazioni (effetto Giacobbe)

[Spiegare con l'aiuto del modello di cartone]

Rompicapi imparentati



Rompicapi imparentati



Rompicapi imparentati



Rompicapi imparentati



Rompicapi imparentati

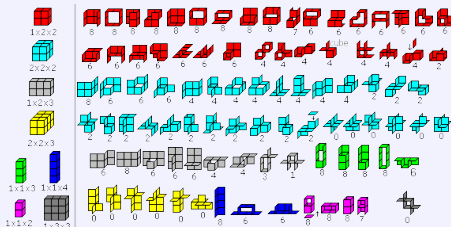


Effetto “esaflexagon”: si continuano a fare sempre le stesse mosse ottenendo solo un numero molto ristretto di configurazioni rispetto a quelle ottenibili, tra cui:

Rompicapi imparentati



Effetto “esaflexagone”: si continuano a fare sempre le stesse mosse ottenendo solo un numero molto ristretto di configurazioni rispetto a quelle ottenibili, tra cui:



Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato iniziale...**

Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato iniziale...**

Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato iniziale...**

Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

- 1 Saper disporre le tessere decorate in tutti i modi possibili (quelli leciti) nella forma di rettangolo 2×4 . Ce ne sono $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 128$, che si riducono a 32 se si tiene conto delle isometrie di un rettangolo;

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato iniziale...**

Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

- 1 Saper disporre le tessere decorate in tutti i modi possibili (quelli leciti) nella forma di rettangolo 2×4 . Ce ne sono $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 128$, che si riducono a 32 se si tiene conto delle isometrie di un rettangolo;
- 2 Saper costruire tutte le forme (configurazioni) possibili di un rompicapo **senza decorazioni**.

Decorazioni sì, decorazioni no

Risolvere il rompicapo vuol dire saper arrivare alla configurazione iniziale o alla configurazione finale (con i tre anelli intrecciati) **a partire da qualunque stato iniziale...**

Ma questo equivale a saper individuare l'insieme delle configurazioni ottenibili...

Possiamo suddividere il problema in due fasi nettamente distinte.

Divide et impera!

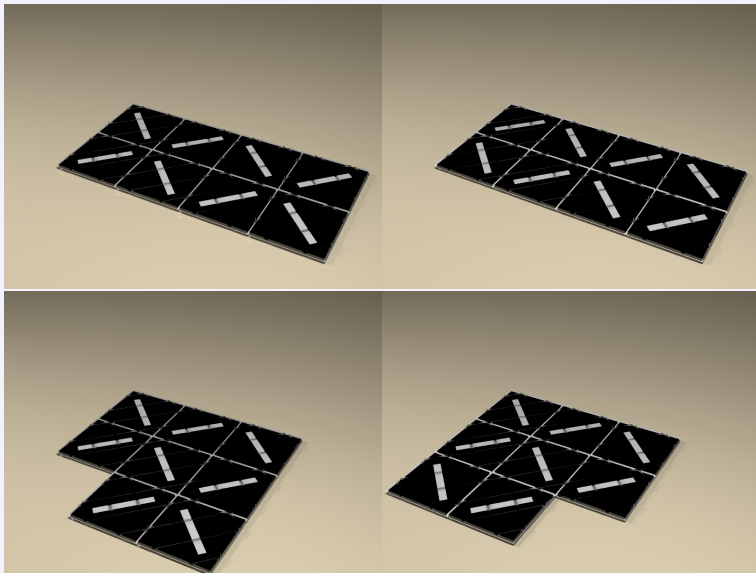
- 1 Saper disporre le tessere decorate in tutti i modi possibili (quelli leciti) nella forma di rettangolo 2×4 . Ce ne sono $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 128$, che si riducono a 32 se si tiene conto delle isometrie di un rettangolo;
- 2 Saper costruire tutte le forme (configurazioni) possibili di un rompicapo **senza decorazioni**.

Problema risolto! [spiegare]

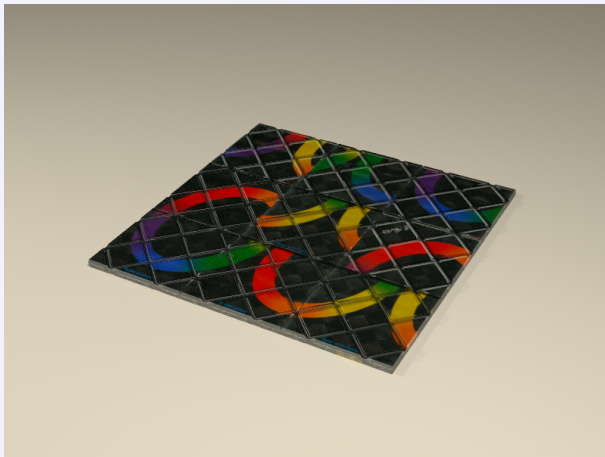
Fase 1: Disporre le tessere decorate...

I vincoli meccanici permettono di limitare a 128 le possibili disposizioni delle tessere, poi basta ideare un insieme di “mosse” (manipolazioni opportune del rompicapo) che permettano, opportunamente combinate, di ottenere tutte le disposizioni. Questo si sa fare!

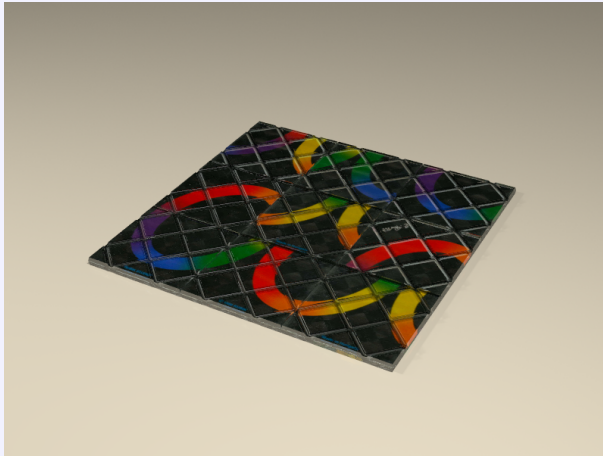
Fase 2: Il rompicapo senza decorazioni



Gli invarianti (1)

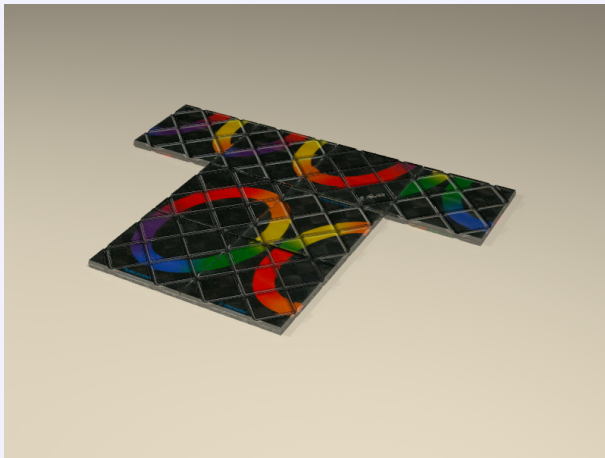


Gli invarianti (1)

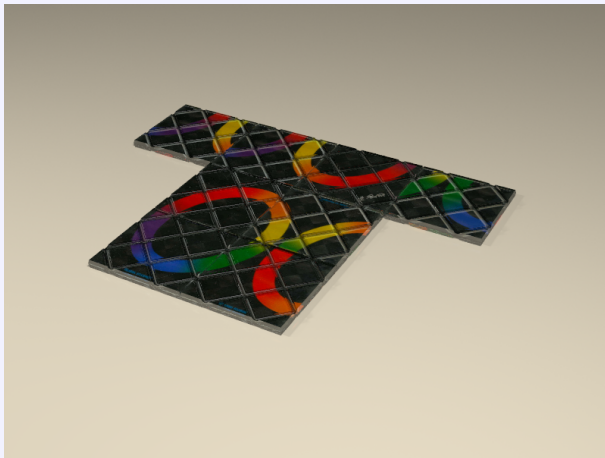


Il numero di tessere è (ovviamente) invariante!

Gli invarianti (2)

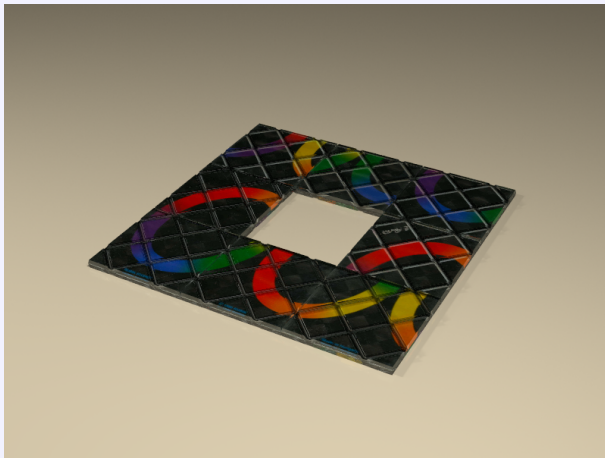


Gli invarianti (2)

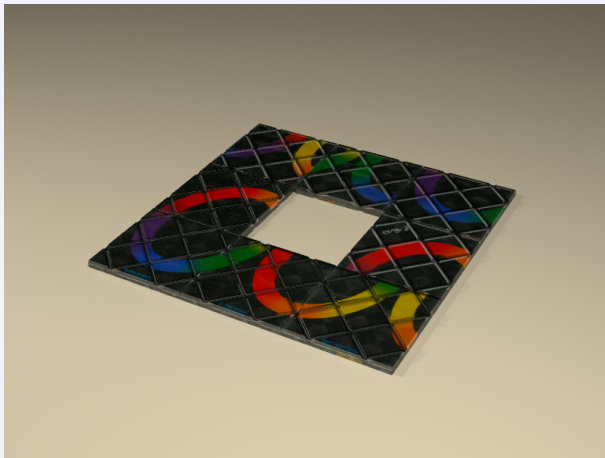


Le tessere devono essere collegate tra loro in una lista circolare

Gli invarianti (3)

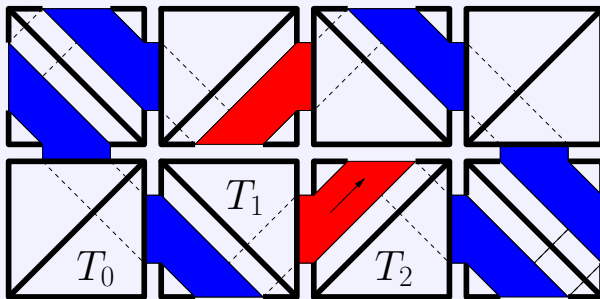


Gli invarianti (3)



Escludere questa configurazione è più delicato...

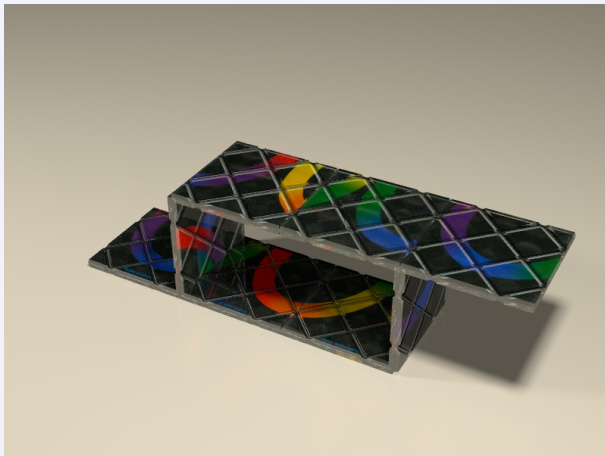
L'artifizio del nastro



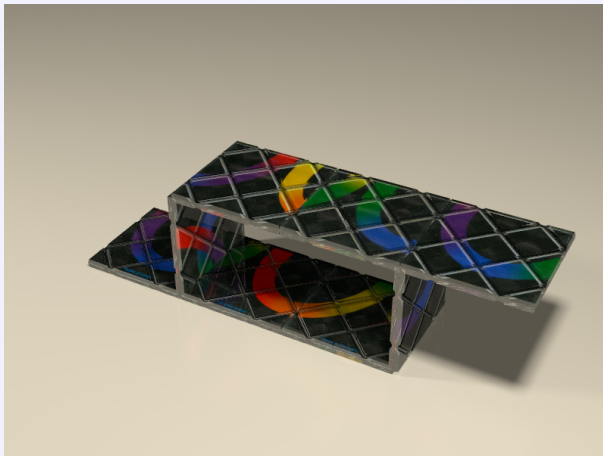
Inseriamo idealmente una fettuccia di stoffa tra le tessere come mostrato, che si dimostra non interferire con le manipolazioni del rompicapo.

La lunghezza del nastro è sempre la stessa, quindi escludiamo configurazioni che implicherebbero un nastro di lunghezza maggiore o minore $\implies$ **invariante metrico**

Gli invarianti (4)



Gli invarianti (4)



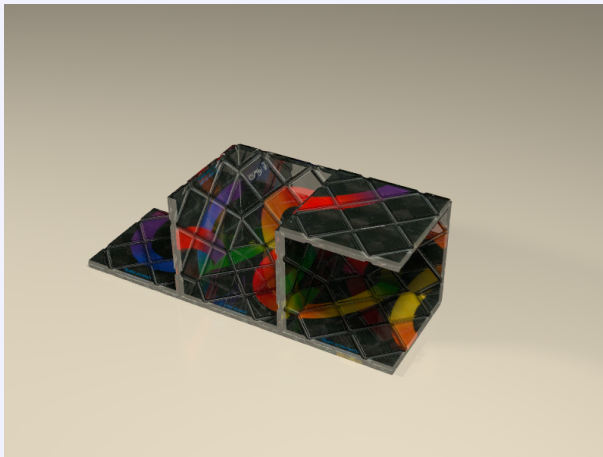
Il nastro dell'artificio è topologicamente equivalente alla superficie laterale di un cilindro $\implies$ **invariante topologico**, linking number (numero di allacciamento) tra i due bordi del nastro.

Gli invarianti (5)

Vorremmo saper effettivamente costruire tutte le forme non escluse... ma

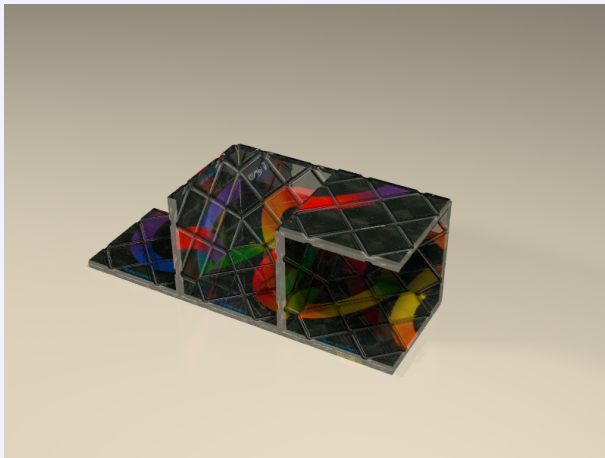
Gli invarianti (5)

Vorremmo saper effettivamente costruire tutte le forme non escluse... ma



Gli invarianti (5)

Vorremmo saper effettivamente costruire tutte le forme non escluse... ma



Questa configurazione non la so costruire, né la posso escludere:
appartiene ad una “zona grigia”

La scelta del modello

Due livelli

- Scelta del modello geometrico
 - Otto quadrati rigidi unitari in $\mathbb{R}^3$ (spessore “infinitesimo”), sempre incernierati, T_k con T_{k+1} , tramite un lato comune...
 - **Oppure:** Devo permettere un po' di elasticità? Se sì, quanta?
- Costruzione del modello matematico (algebrizzazione)

È un modello! Cosa può andare storto?

La scelta del modello

Due livelli

- Scelta del modello geometrico
 - Otto quadrati rigidi unitari in $\mathbb{R}^3$ (spessore “infinitesimo”), sempre incernierati, T_k con T_{k+1} , tramite un lato comune...
 - **Oppure:** Devo permettere un po' di elasticità? Se sì, quanta?
- Costruzione del modello matematico (algebrizzazione)

È un modello! Cosa può andare storto?

- 1 Il modello può essere troppo “liberale”, le tessere reali hanno uno spessore per nulla infinitesimo, che non mi permette ad esempio di impilare tutte le otto tessere una sull'altra, il modello geometrico invece ce lo permette.

La scelta del modello

Due livelli

- Scelta del modello geometrico
 - Otto quadrati rigidi unitari in $\mathbb{R}^3$ (spessore “infinitesimo”), sempre incernierati, T_k con T_{k+1} , tramite un lato comune...
 - **Oppure:** Devo permettere un po' di elasticità? Se sì, quanta?
- Costruzione del modello matematico (algebrizzazione)

È un modello! Cosa può andare storto?

- 1 Il modello può essere troppo “liberale”, le tessere reali hanno uno spessore per nulla infinitesimo, che non mi permette ad esempio di impilare tutte le otto tessere una sull'altra, il modello geometrico invece ce lo permette.
- 2 Ma succede anche il contrario: ci sono manipolazioni tranquillamente fattibili con il rompicapo vero, ma che il modello geometrico non permette. [provare a far vedere un esempio]

Vogliamo studiare il rompicapo reale, non una sua idealizzazione matematica, quindi non vogliamo essere troppo “rigidi” e lasciamo un po' di libertà nella scelta del modello.

Per “contare” le possibili forme dobbiamo delimitare il campo. Un modo (non ovviamente l'unico) consiste nel limitarsi ai cosiddetti **octominoidi**: otto quadrati nello spazio disposti secondo un reticolo cubico e formanti un insieme connesso (come i polimini in 2D).

- Forziamo tutti gli angoli ad essere multipli di 90 gradi;
- Impediamo la presenza di tessere giustapposte.

Ragioneremo sempre *a meno di simmetrie*, riflessione compresa.

Contiamo le configurazioni (2)

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

Contiamo le configurazioni (2)

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse

Contiamo le configurazioni (2)

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**

Contiamo le configurazioni (2)

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**
- 455 di queste rispettano il vincolo dell'**invariante metrico**

Contiamo le configurazioni (2)

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**
- 455 di queste rispettano il vincolo dell'**invariante metrico**
- 265 di queste rispettano anche il vincolo **topologico**

Contiamo le configurazioni (2)

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**
- 455 di queste rispettano il vincolo dell'**invariante metrico**
- 265 di queste rispettano anche il vincolo **topologico**
- e di queste, 105 sono forme simmetriche (**che sono state tutte ottenute**).

Al momento (5/10/2014) abbiamo effettivamente costruito 249 delle 265 forme teoricamente ammissibili, 16 (ovvero circa il 6 per cento) rimangono nel limbo!

Contiamo le configurazioni (2)

Ci sono 207265 octominoidi, ma naturalmente la stragrande maggioranza non può essere ottenuta per i vincoli meccanici del rompicapo.

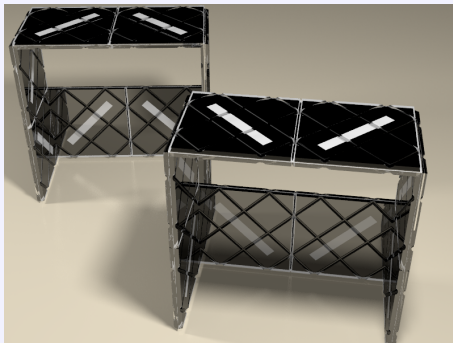
- 1718 sono ottenibili come catene chiuse
- 582 di questi sono anche **orientabili**
- 455 di queste rispettano il vincolo dell'**invariante metrico**
- 265 di queste rispettano anche il vincolo **topologico**
- e di queste, 105 sono forme simmetriche (**che sono state tutte ottenute**).

Al momento (5/10/2014) abbiamo effettivamente costruito 249 delle 265 forme teoricamente ammissibili, 16 (ovvero circa il 6 per cento) rimangono nel limbo!

Aggiornamento: sono poi state trovate anche le rimanenti 6!

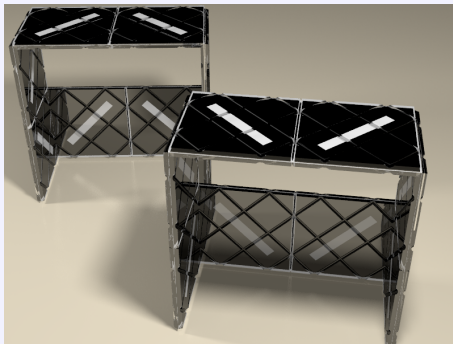
Contiamo le configurazioni

Un particolare octominode può spesso essere ottenuto con configurazioni diverse del rompicapo non decorato:



Contiamo le configurazioni

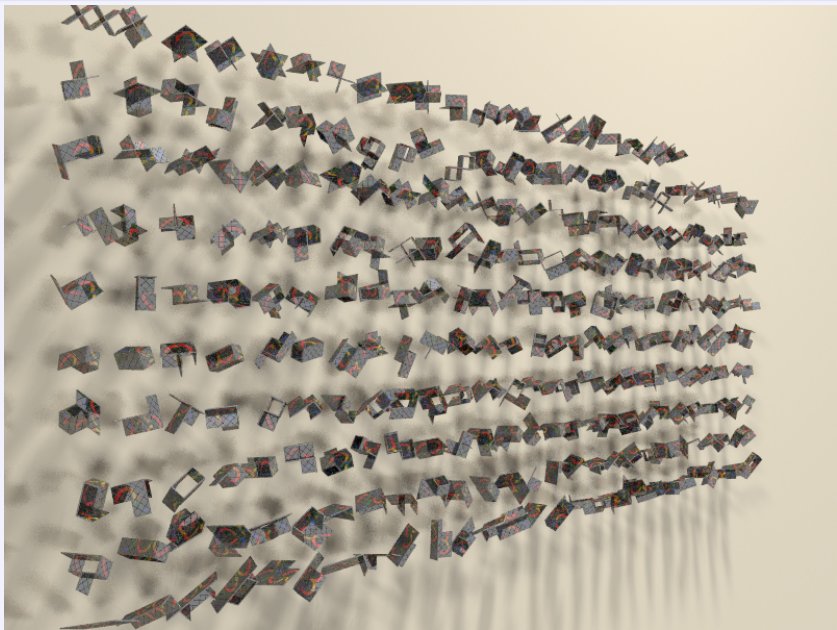
Un particolare octominode può spesso essere ottenuto con configurazioni diverse del rompicapo non decorato:



Abbiamo:

- 1291 configurazioni chiuse e orientabili; [582]
- 737 con invariante metrico rispettato; [455]
- 460 con rispettato anche l'invariante topologico. [265]

Contiamo le configurazioni (2)



Siti web e riferimenti bibliografici

- [http://dmf.unicatt.it/~paolini/rubiksmagic/3D/Studio configurazioni 3D "octominoidi"](http://dmf.unicatt.it/~paolini/rubiksmagic/3D/Studio%20configurazioni%203D%20%20octominoidi).
- https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik's_Magic
Pagina wikipedia.
- <http://www.mathematische-basteleien.de/magics.htm>
Descrizione a cura di Jürgen Köller.

-
- A. Fiore, *Making Rubik's MAGIC*, Puffin/Penguin Books, 1986.
 - J. Nourse, *Simple Solutions to Rubik's MAGIC*, Bantam Books, 1986
 - M. Paolini, *A new topological invariant for the "Rubik's Magic" puzzle*, arXiv:1401.3699 [math.CO]
 - T. Verhoeff, *Magic and Is Nho Magic*, *Cubism For Fun* (15), 24–31.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE



Cose non dette...

- Descrizione di una configurazione 3D con una stringa di caratteri
- Il software per calcolare gli invarianti
- Il software per costruire le immagini

Una forma difficile da costruire:

